This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

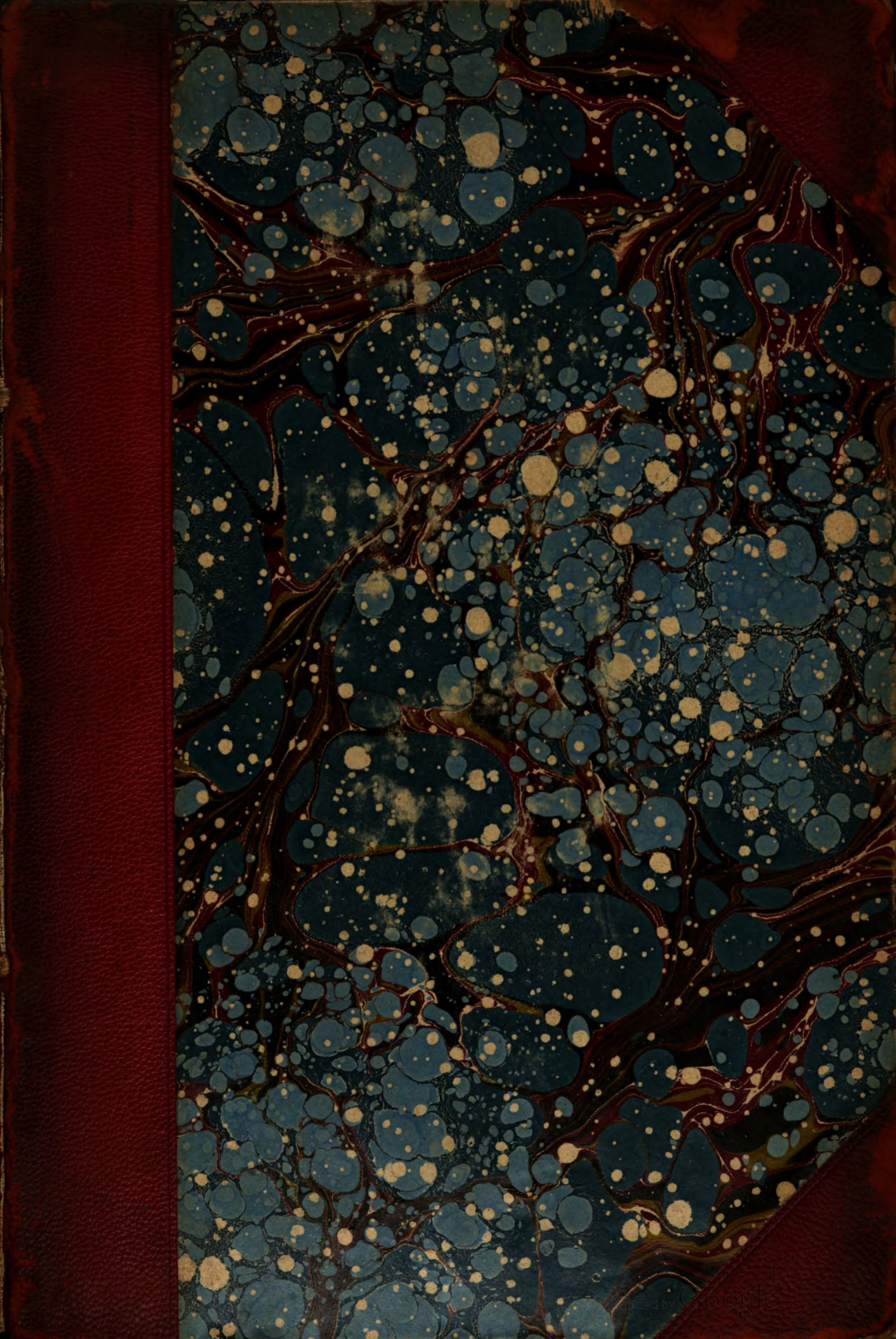
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



Math.
Class Book
University of Chicago Library
GIVEN BY

Besides the main topic this book also treats of

Subject No.	On page	Subject No.	On page

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO V.

1902

TORINO

CARLO CLAUSEN

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

1902

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Genova. – Tipografia Sordomuti

Digitized by Google

INDICE

G. Vacca. Sui manoscritti inediti di Harriot, p. 1-6.
R. Bonola. Bibliografia sui fondamenti della geometria, in relazione alla geometria non-euclidea, p. 33-41, 65-71.
G. L. Elenco delle pubblicazioni matematiche di Ernesto de Jonquières, p. 71-82.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

Pincherle. Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi [Ettore Bortolotti], p. 6-14. — **M. Cantor.** Vorlesungen über Geschichte der Matematik, III, 2.ª ed. [G. L.], p. 15-18. — **C. Arzelà.** Lezioni di Calcolo infinitesimale, I, 1.ª Parte [G. Vivanti], p. 18-19. — **F. Enriques.** Lezioni di geometria descrittiva [G. L.], p. 19-23. — **W. F. Meyer.** Differential-und Integralrechnung, 1. (G. Vivanti], p. 23-25. — **G. Rost.** Theorie der Riemann'schen Tnetafunction [G. Vivanti], p. 25. — Annuaire du Bureau des Longitudes [G. L.], p. 26. — Bibliothèque du Congrès international de Philosophie. III. [G. L.], p. 41-45. — **G. Vivanti.** Teoria delle funzioni analitiche [C. Severini], p. 45-47. — **H. Komen.** Geschichte der Gleichung $t^3 - D u^2 = 1$ [G. L.], p. 47-48. **H. Wiener.** Die Einteilung der eb. Kurv. und Kegel III Ordn. [G. L.], p. 48-49. **Frizzo.** De numeris libri duo [G. L.], p. 49-51. — **Volterra.** Sui tentativi di applic. delle matematiche alle scienze biologiche e sociali [G. L.], p. 51-52. — **Basset.** Cubic and quartic Curves [G. L.], p. 52-53. — **Netto.** Combinatorik [G. L.], p. 53-54. — Annuaire des Mathématiciens [G. L.], p. 54-56. — **Wargny.** Tratado de Trigonometria [G. L.], p. 56. — **Hammer.** Sechstellige Tafel [G. L.], p. 56-57. — **Bohnert.** Stereometrie [G. L.], p. 57. — **Baule.** Vermessungskunde [G. L.], p. 57. — **Ferraris.** Elektrotechnik, p. 58. — **Hadamard.** La série de Taylor et son prolongement analytique [G. Vivanti], p. 82-85. — **Lemoine.** Géométrographie [G. L.], p. 85-86. — **Czuber.** Probabilités et moyennes géométriques [G. Vivanti], p. 86. — **Borel.** Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. [G. Vivanti], p. 97. — **Veronese.** Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici [F. Palatini], p. 104. — **Barbarin.** Études de géométrie analytique non-euclidienne [R. Bonola], p. 109. — **Zeuthen.** Histoire des mathématiques [G. L.], p. 112. — **K. F. Gauss.** General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825 [G. Vacca], p. 114. — **Frankland.** The story of Euclid [G. L.], p. 117. — **Rigobon.** [Studi] antichi e moderni intorno alla tecnica dei commerci [G. Vacca], p. 117. — **Molk et Tannery.** Fonctions elliptiques. IV. [G. L.], p. 118. — **Montcheuil.** Sur une classe de surfaces [G. L.], p. 119. — **Capelli.** Aritmetica ragionata e algebra [U. Ceretti], p. 120. — **Perry.** Höhere Analysis [G. Vivanti], p. 122. — **Bardey.** Algebraische Gleichungen [G. L.], p. 124. — **Pizzetti.** Figura dei pianeti, p. 125.

Digitized by Google

PROGRAMMI E RIASSUNTI

DI CORSI UNIVERSITARI.

R. Università di Pavia: Corso di Analisi superiore 1900-1901 [Prof. E. Pascal], p. 26-31.
R. Università di Bologna: Corso di Matematiche superiori 1899-1900 [Prof. C. Arzelà], p. 58-60.
R. Università di Pavia: Corso di Analisi superiore 1901-1902 [Prof. E. Pascal], p. 90-95.

NECROLOGIO.

C. T. Cazzaniga, p. 87-89. — Elenco delle pubblicazioni di C. T. Cazzaniga [A. Viterbi], p. 89-90.
E. L. Fuchs [G. L.], p. 126-127.

NOTIZIE.

Per favorire le ricerche sul calcolo geometrico. — Il metro proposto come unità di misura nel 1675. — Tema proposto dal R. Istituto Lombardo per l'anno 1903. — I premi dell'Istituto di Francia, p. 31-32.
Tema riproposto a concorso dal R. Istituto Veneto. — Pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. — Questione d'Astronomia proposta dalla R. Accademia delle Scienze di Danimarca. — Nuovi documenti per la storia della geometria euclidea. — Resoconti di congressi. — Concorsi di indole didattica. — Italiane dottoresse in matematica. — Progressi dell'« Esperanto ». — Tema proposto dalla Società Olandese delle Scienze (Harlem), p. 61-64.
Il primo centenario della nascita di Abel. — Una lettura inedita di Jacobi. — Carteggio fra Aronhold e Hesse. — Una nuova Società matematica. — Argomenti di corsi universitari, p. 96.
Alcune ricerche inedite di G. Bolyai. — Il IV vol. del « Poggendorff ». — Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Errori di un grande. — Periodici scientifici italiani, p. 127-128.

Indice dei nomi, p. 129.

Digitized by Google

ANNO V. GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7. 50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

G. VACCA. *Sui manoscritti inediti di Harriot.*

Recensioni ed annunzi: S. PINCHERLE. *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* [E. Bortolotti]. — M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, III, 2.ª ed. [G. L.]. — C. ARZELÀ. *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, I, 1.ª Parte [G. Vivanti]. — F. ENRIQUES. *Lezioni di geometria descrittiva* [G. L.]. — F. MEYER. *Differential-und Integralrechnung*, I. [G. Vivanti]. — G. ROST. *Theorie der Riemann'schen Thetafunction* [G. Vivanti]. — *Annuaire du Bureau des Longitudes* [G. L.].

Programmi e riassunti di corsi universitari: Università di Pavia. Corso di Analisi superiore [E. Pascal].

Notizie: Per favorire le ricerche sul calcolo geometrico. — Il metro proposto come unità di misura. — Tema proposto dall'Istituto Lombardo. — I premi dell'Istituto di Francia.

SUI MANOSCRITTI INEDITI DI THOMAS HARRIOT

Nota di G. VACCA

I.

Una delle migliori biografie di questo matematico è quella scritta da Miss A. M. Clerke (A. M. C.), ed inserita nel Dictionary of National Biography ed. by Leslie Stephen and Sidney Lee, London, 1890, vol. 24, pag. 437-439.

In questa nota mi propongo di aggiungere alcune notizie a quelle ivi date, relative ai numerosi Mss. inediti di Harriot.

Per questo scienziato, come per quelli che non riuscirono, in vita, a pubblicare il frutto dei loro lavori, queste ricerche hanno molto interesse, tanto più poi per Harriot, il quale per le lodi dategli, forse senza prove sufficienti, da Wallis, ebbe a soffrire gravi critiche dagli storici della matematica, fino al punto che lo si cita soltanto, o quasi, per dire che la sua *Artis analyticae Praxis* (1631) non contiene nulla d'interessante.

Digitized by Google

Io ho già notato (1) che ad H. si devono importanti diseguaglianze algebriche, la ingegnosa dimostrazione delle quali era già stata rilevata da Lagrange (2). Desidero ora aggiungere altre prove del suo genio matematico.

I manoscritti di H. attualmente conosciuti, furono scoperti nel 1784 dal Barone di Zach, il quale ne rilevò l'importanza per la storia dell'astronomia, e ne propose una parziale pubblicazione. Questa però non ebbe luogo, avendo il Dr. Robertson, professore Saviliano di astronomia, manifestata l'opinione che tale pubblicazione non avrebbe contribuito al progresso della scienza (Edinburgh Philosophical Journal a. 1802, VI, 314).

Io ho potuto scorrere rapidamente nel mese di Agosto, i suoi manoscritti conservati nel British museum e descritti nella biografia sopracitata. Constano di parecchie migliaia di pagine contenenti frammenti, calcoli, disegni, ecc.

Sono indubbiamente mss. originali di H. gli otto volumi intitolati: *T. Harriot Math. Papers*, pres. by the Earl of Egremont, add. 6782-9.

Non sembrano invece suoi i mss. Harl. 6001-2, 6083, i quali contengono in parte frammenti copiati dagli otto volumi precedenti, in parte sono evidentemente posteriori ad H. Così p. es. il mss. 6083, fol. 279-302 contiene degli interessanti *Élements des indivisibles*, ed un *Traicté d'Algèbre*, in francese, in cui, come dice anche Miss Clerke (p. 439), vi sono notevoli applicazioni dell'algebra alla geometria. Questo trattato d'Algebra contiene anche il famoso teorema sul numero delle radici positive di una equazioue, enunciato per la prima volta da Descartes nella sua *Geometria* (1637). Sarebbe interessante poter stabilire la data e l'autore di questo trattato che non è certo di H., come lo prova ad es. l'uso degli esponenti che egli non adoperava.

Ecco ora alcune tra le cose più notevoli che ho trovato in questi manoscritti.

II.

HARRIOT, *forse per il primo, ha misurato l'area del triangolo sferico.*

Questa scoperta si attribuisce ordinariamente a Girard e a Cavalieri. Così ad es. il Baltzer nei suoi Elementi di matematica (vers. ital. di L. Cremona, parte 5.ª, Genova. 1877, p. 43 nota):

« GIRARD (*Invention nouvelle en Algèbre* 1629) conobbe questo teo-
» rema, ma lo dimostrò incompletamente. Esso fu pubblicato, colla

(1) Formulaire de Mathématiques, p. 64, Paris, Carré et Naud, 1901.
(2) Œuvres, t. 4, p. 436,

Digitized by Google

» semplice dimostrazione qui riportata da CAVALIERI *Directorium generale Uran.*, 1632). La regola pel calcolo dell'area di un poligono » sferico è riferita da BROSCIO (*Apologia* aristot. et Euclid. 1690, » p. 78), come desunta *ex antiquis in Vitellonem notis.* Questa citazione, come anche la notizia del medesimo autore, p. 79: *demonstratio amplitudinis* anguli solidi refertur ab H. Briggio ad Th. » Harriotum — mancano finora di più ampia conferma ».

Ho riportato intero il passo del Baltzer perchè ne dò qui sotto la conferma, non credendo sia stata ancora data da altri.

Nessuna risposta è stata finora pubblicata alla Quest. 22 fatta dal prof. Enëstrom, il quale domandava nella sua *Bibliotheca Mathematica* (a. 1888, t. 2, p. 96), se qualche geometra anteriore a Cavalieri o a Girard avesse ricercato l'area di cui qui si tratta.

H. Brigg era in corrispondenza con Keplero. Nella sua lettera del 20 Febbraio 1625, con cui accompagnava l'invio della sua *Arithmetica Logarithmica* (Londini, 1624), gli scriveva:

« Cum doctissimus vir et geometra, Thomas Hariottus, longe peri» tissimus invenerit modum metiendi angulum quemlibet solidum, ab » angulis planis comprehensum, quantitatem anguli solidi tetraëdri » hic adjungendam censui, ut constaret, quam longe recedant a vero, » qui arbitrantur, 12 angulos tetraëdri complere locum solidum.

« Valet enim Angulus solidus tetraëdri $\frac{350958}{1000000}$ anguli solidi recti, » ita ut locus solidus capiat 11 huiusmodi angulos et amplius.

» Cum propediem expectemus et exoptemus ipsius auctoris librum » posthumum (T. Harriotus, 1621), qui istud problema inter alia » multa ejus acutissima scripta nobis patefaciet, modum mensurandi » illi integrum relinquam: ne illi quicquam proripuisse aut ipsam rem » non pro dignitate tractasse videar ».

(Kepleri, opera omnia ed. Frisch, vol. IV, Frankofurti, 1863, p. 661).

Questo passo di Brigg rende manifesto che Harriot sapeva misurare l'area del triangolo sferico; il calcolo riportato lo dimostra.

Ma vi ha di più. Nel mss. add. 6787, fol. 106 r. si trova il passo seguente, di mano di Harriot:

« Inveni rationem accuratam mensurandi superficies triangulorum » sphaericorum 18: sep. 1603.

» Et est talis: Adde simul omnes angulos trianguli inde detrahe 180, » quod superest fac numeratorem ad 360. Dico quod illa fractio exprimit partes haemisphaerii quae continet triangul: vel tot gradus » numera in circulo magno quot sunt in numeratore et a polo illius » circuli descendunt duo quadrantes terminantes illos gradus dico quod » hoc triangulum aequatur triangulo sphaerico praedicto ».

Lo stesso passo è ricopiato nel vol. 6001-2, fol. 21 Harl. Mss. da

Digitized by Google

un copista anonimo (forse Pell?), il quale vi ha scritto sotto Mr. Harriot.

Più innanzi (add. 6785, fol. IV, fol. 119 r.), ma senza data, si trova, pure scritto da H. il seguente:

« Canon universalis, pro superficie cuiuslibet polygoni sphaerici.
» Adde omnes angulos cuiuslibet polygoni simul: a summa subtrahe » toties 180 quoties possibile: dimidium reliqui aequale est superficici » polygoni ».

Non vi ha ragione per dubitare dell'autenticità di questi passi: si può quindi supporre che tanto Girard, quanto Cavalieri, avessero almeno avuto sentore della scoperta di Harriot, annunciata a Keplero nel 1625, e già nota a Brigg. Dobbiamo quindi deplorare che gli eredi di H. non abbiano pubblicato le opere inedite, azione doverosa, poichè se H. non pubblicò le sue scoperte finchè visse, fu perchè fu occupato per gran parte della sua vita dai pubblici negozi, in cui diede prova del suo ingegno e della sua attività, e perchè, terminati, questi, la cattiva salute forse glielo impediva, come scriveva in una lettera a Keplero del 2 Dec. 1606:

« . . . ob malam valetudinem, qua nunc ita affectus sum, ut mihi » molestum sit vel scribere, vel accurate de aliqua re cogitare et » argumentari ».

(Kepl. op. t. 2, 1863, p. 71).

III.

I coefficienti binomiali, come prodotti sono stati dati, con formole generali da HARRIOT.

Si attribuisce di solito a Newton questa importante scoperta. Ma già il Koppe nella Biblioteca Mathematica t. 2, *s.* 3, p. 360, a. 1901, osserva che essa si trova nella *Arithmetica Logarithmica* di Brigg (1624).

Posso aggiungere che i coefficienti binomiali così considerati si trovano molte volte nei Mss. di Harriot (morto nel 1621).

Egli pensava di pubblicare un'opera di cui ci ha lasciato il titolo: « *De numeris triangularibus et inde de progressionibus arithmeticis Magisteria magna* ».

Di essa si trovano parecchi tentativi di redazione e frammenti nel vol. add. 6782, ricopiati in parte dallo stesso anonimo sopra citato, nel Harl. Mss. 6083. Da quanto ho potuto vedere sembra che dovesse essere un trattato contenente molte proprietà dei coefficienti binomiali, e molte formole sommatorie abbastanza complicate.

Digitized by Google

Eccone alcuni frammenti:

(fol. 108 r.)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \times & \times & \times & & \\ 1 = 2 = 3 = & 4 & \&c. & & \\ \times & \times & \times & & \\ 1 = 3 = 6 = & 10 & & & \end{array}$$

&c.

$$1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{12}{12} \cdot \frac{123}{123} \cdot \frac{1234}{1232} \cdot \quad \&c.$$
$$1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{23}{12} \cdot \frac{234}{123} \cdot \frac{2345}{1234} \cdot$$

&c.

$$1 \quad \frac{n}{1} \qquad \frac{n}{\frac{n+1}{12}} \qquad \frac{n}{\frac{n+1}{\frac{n+2}{123}}} \qquad \frac{n}{\frac{n+1}{\frac{n+2}{\frac{n+3}{1234}}}} \quad \&c.$$

Dalle quali tabelle appare come H. fosse in possesso delle formole generali per il calcolo dei coefficienti del binomio.

(fol. 110 r.)

$$\begin{aligned} &1 = 1 \\ &1 \cdot 1 = 2 \\ &1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \\ &1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 8 \\ &\quad \ldots \qquad \&c. \end{aligned}$$

Tabella che dà la somma dei coefficienti di un binomio.

(fol. 112 r.)

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ & c+b & \\ b & & d+2c+b \\ & b+a & \\ a & & c+2b+a \end{array}$$

e in generale (id.):

$$g + \frac{n \mid f}{1 \mid} + \frac{\begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix} \Big| d}{12 \mid} + \frac{\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \\ n \end{matrix} \Big| c}{123 \mid} + \frac{\begin{matrix} n-3 \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{matrix} \Big| b}{1234 \mid}$$

Qui H. anticipa la scoperta delle formole che danno le somme successive di una successione $a, b, c, d, f, g, \ldots$ Questi calcoli furono

Digitized by Google

ripresi soltanto nel 1668 da Mercator, il quale, nella sua Logarithmotechnia, diede le formole per la differenza n.^{ma} di una successione (1). Soltanto dopo il 1700 il calcolo delle differenze finite assunse un ulteriore sviluppo.

(fol. 154 r.). Dà le somme successive dei numeri triangolari.

(fol. 155. r). Dà le somme successive dei numeri quadrati

(fol. 218 r.). Non conoscendo l' uso degli esponenti tenta una notazione corrispondente: così scrive $\boxed{n, 7}$, oppure $\boxed{7, n}$ per indicare n^7.

Qui terminerò osservando che ho abbreviato per comodità tipografica le tavole, molto estese, di H. sopra riportate, e che la forma dei segni $=$, $>$, nei mss. di H. differisce alquanto da quella adottata dagli editori della sua *Artis analyticae Praxis*, che è quella ora in uso.

Possiamo di qui farci un' idea di quanto H. fosse andato innanzi nello studio dell'aritmetica, anticipando egli di una quarantina d'anni le scoperte fatte più tardi da Pascal, da Fermat e da altri, e come sia stato dannoso alla sua fama che i suoi studi siano rimasti nascosti al pubblico.

A giustificare però coloro che ebbero la possibilità di pubblicarli, e non lo fecero, rimane solo il fatto che i mss. di H., contenenti soltanto formole e calcoli numerici, quasi senza testo, dovevano essere per i suoi contemporanei di assai difficile lettura.

Ospite degli Inglesi per alcune settimane, ho voluto dimostrare loro la mia gratitudine per la cordiale accoglienza ricevuta, offrendo loro questo mio piccolo contributo alla storia dei loro matematici del secolo XVII, forse oggi troppo trascurati, come spero di poter meglio provare in seguito.

Torino, Novembre 1901.

RECENSIONI ED ANNUNZI

Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi, di Salvatore Pincherle, in collaborazione con Ugo Amaldi. Bologna, Nicola Zanichelli, 1901, 8.°, pag. xii + 490 [Prezzo L. 15].

La teoria delle operazioni funzionali distributive, intuita ed intraveduta fino dai primordi del calcolo differenziale, studiata sotto aspetti

(1) Cfr. Revue des Mathématiques, t. 7, p. 101. a. 1901.

Digitized by Google

diversi e con diversi nomi dai matematici della fine del secolo XVIII e del principio del XIX, lasciata poi in disparte, quando gli studi critici sui fondamenti del calcolo, fecero nascere dei dubbi sulla validità effettiva dei risultamenti che con essa si conseguivano, è stata ripresa in questi ultimi anni, dal prof. Pincherle in Italia e, dopo di lui, da alcuni valorosi scienziati della scuola francese.

Il Pincherle principalmente ha conservato alla teoria la generalità di vedute, con cui nei primi tempi fu concepita: introducendo il rigore nei metodi, stabilendo i campi di validità degli sviluppi, mostrandone le facili ed eleganti applicazioni, non pure l'ha posta su basi sicure, ma l'ha completamente ricostruita, e la presenta ora, intera in ogni sua parte, nell'opera che abbiamo sott'occhio.

Nel *discorso preliminare* alla **Analisi derivata** (1) il BRUNACCI esponeva nettamente lo scopo di questo genere di studi dicendo:

« . . . . Ma tutti questi rami di analisi potrebbero eglino derivarsi da un principio comune, da una veduta generale di considerare » le quantità, di modo che essi non differissero fra di loro, che nel » particolarizzare lo stesso generale principio? Questa unità di origine » una volta riconosciuta, quei calcoli che sembrano più diversi, il calcolo differenziale per esempio, e quello degli esponenti, si troverebbero così imparentati fra loro, perchè riuniti sotto uno stesso » punto di vista. Le sparse teorie essendo in questa guisa richiamate » ad una unica sorgente, la matematica acquisterebbe un grado di » semplicità ed una generalità, di cui non si è avuto fin ora alcuna » idea; e ciò che interessa ancora più, si travederebbero i progressi, » che essa è per fare ».

L'opera del Pincherle è in tutto rispondente a quei desideri.

I principî su cui essa si fonda sono pochi e di uso comune; da questi però con saldo raziocinio e lucida esposizione, vengono d'una in altra tratte e sviscerate tutte le necessarie conseguenze, giungendo a risultamenti della massima generalità ed estensione, che costituiscono uno dei più potenti e sicuri mezzi di analisi.

All'intendimento dell'opera basta la conoscenza degli elementi della teoria delle funzioni, ma i frutti migliori ne saranno raccolti da chi già è in possesso di una discreta coltura scientifica.

Questi scorgerà di qui come un gran numero di principî diversi possano essere ben compresi ad un tempo, senza che sieno insieme confusi, troverà i fondamenti comuni alle varie teorie, che già egli aveva separatamente studiate, vedrà fino a qual punto esse camminino insieme ed in che si differenzino le une dalle altre. Penetrando egli così più addentro nella filosofia della scienza, avrà modo di coltivare

(1) Un bel volume di 217 pagine stampato a Pavia nel 1802.

Digitized by Google

quella qualità rara e preziosa della mente che il Pascal ed il Beltramì chiamano spirito fine.

Un altro vantaggio che può dare la lettura di questo libro, è quello di condurre il lettore fino ai confini che, in quella direzione, sono ora segnati alla scienza; ad ogni passo si presentano perciò, spontaneamente, questioni di attuale interesse e di indiscussa utilità; alle quali è sempre possibile, se non sempre agevole, rispondere, per chi abbia acquistato il possesso delle teorie e la pratica dei metodi usati nel testo.

La facile e piana esposione, i continui richiami al testo, le numerose ed accurate notizie bibliografiche, ed anche la nitidezza della composizione tipografica, l'accurata numerazione dei paragrafi, riportata insieme col titolo dei principali argomenti al sommo della pagina, l'indice alfabetico delle cose più notevoli trattate nell'opera; fanno fede della cura che gli autori e gli editori hanno posto per renderne facile e gradita la lettura, pronta la consultazione.

I pochissimi errori di stampa non sono mai tali da poter generare dubbio o confusione, non vale la pena di notare qualche punto che la troppa concisione rende un po' oscuro, e qualche passo in cui si concede troppo abbondante svolgimento ad un facile tema; piuttosto parmi di poter notare che il libro vantaggierebbe da una trasposizione di capitoli, che saldasse più strettamente insieme le parti che sono di puro svolgimento di teoriche generali, e concedesse maggior rilievo alle analogie che si riscontrano nella trattazione di argomenti diversi fatta con metodo unico.

Nello studio del Calcolo funzionale si possono seguire due indirizzi essenzialmente distinti, e cioè:

I). considerare l'insieme di tutte le funzioni analitiche, come costituente uno spazio vettoriale ad infinite dimensioni ed estendere a questo spazio la teoria delle omografie negli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni;

II). generalizzare i metodi usati nella teoria delle funzioni analitiche, considerando come elemento fondamentale, lo sviluppo di una operazione distributiva in serie ordinata secondo le potenze del simbolo D di derivazione ordinaria.

All'una od all'altra di quelle generali vedute, possono raccordarsi alcune speciali interpretazioni a cui sono subordinati i seguenti metodi di indagine:

III). La determinazione di una operazione funzionale distributiva a senso unico, mediante relazioni analitiche (dette *equazioni simboliche*) fra il simbolo operativo e quelli delle sue derivanti funzionali successive.

Digitized by Google

IV). La determinazione di una operazione distributiva a senso unico mediante le funzioni che essa fa corrispondere alle potenze intere, positive e nulle, della variabile.

V). Lo studio delle trasformazioni nello spazio che ha per elementi le operazioni distributive a senso unico.

I primi cinque Capitoli dell'opera di Pincherle e Amaldi seguono l'indirizzo I), negli altri prevale il II). Le equazioni simboliche sono, in casi abbastanza istruttivi, studiate nel Cap. 7.°: tutto il Cap. 13.° è dedicato allo studio delle trasformazioni delle operazioni, ed infine, nel Cap. 7.°, si studiano le operazioni normali col metodo IV).

Quelle strade partono da punti diversi ma concorrono verso una unica mèta. Alcune di esse furono intraviste fino dai primi tempi, altre si debbono alla geniale intuizione del Prof. Pincherle. Quelle indicate coi numeri II), III), hanno origine da una fortunata estensione del concetto di derivazione; la IV) si collega con la teoria dei determinanti infiniti e dei sistemi di infinite equazioni lineari, e da sola potrebbe servire allo svolgimento completo di tutta la teoria generale.

Gioverà ora, per dare una migliore idea dell'opera, seguirne passo passo lo svolgimento in un brevissimo sommario.

I primi quattro capitoli espongono sinteticamente la teoria degli spazi lineari ad n dimensioni e delle operazioni distributive sui vettori di questi spazi.

Lo studio delle operazioni degeneri conduce alla definizione di enti e di spazi invarianti; sono interessanti i risultamenti relativi ad operazioni commutabili fra loro ed in particolare, lo sviluppo di una operazione distributiva in serie procedente secondo le potenze di un'altra operazione con essa commutabile.

Nel Cap. IV è studiata la struttura degli spazi invarianti ad un numero finito di dimensioni. Il metodo seguito in questo studio è dovuto allo stesso prof. Pincherle che ne fece oggetto di una comunicazione all'Istituto lombardo nell'anno 1896. — Estendendo opportunamente i concetti di sistemi ed equazioni fondamentali, e di radici proprie, egli giunge con grande semplicità di mezzi a risultamenti analoghi a quelli che si hanno nella teoria dei divisori elementari di Weierstrass.

Nel Cap. V si restringe il concetto di ente od elemento alle funzioni analitiche, ma si estende quello di iperspazio, ammettendo che il numero delle dimensioni possa anche essere infinito, purchè numerabile.

In particolare si studiano le proprietà degli insiemi S^r costituiti da tutte le serie di potenze che hanno raggio di convergenza superiore al numero positivo r.

Digitized by Google

Fra le operazioni distributive sui vettori di quegli iperspazi sono considerate come fondamentali quelle dette di moltiplicazione, derivazione, sostituzione, e di queste si studiano le proprietà caratteristiche.

È degna di nota infine la osservazione che agli spazi S^r, considerati come intorni dell'elemento 1, si possono aggiungere elementi nuovi, considerati come intorni di qualunque funzione analitica μ, generando così spazi a mano a mano più estesi, con metodo che non è senza analogia con quello che prende il nome di Galois nella teoria delle equazioni algebriche.

La generalizzazione della formula del Taylor, fatta con l'attribuire al simbolo di derivazione una maggiore ampiezza di significato, è questione trattata da molto tempo, e da molti, ma sempre, prima del Pincherle, in modo formale, cioè senza che fossero note le condizioni per la validità effettiva degli sviluppi.

Il Pincherle invece, il quale sembra ispirarsi al concetto che, come ogni funzione analitica è rappresentabile mediante una serie di potenze della variabile, così ogni operazione distributiva funzionale è sviluppabile in serie di potenze del simbolo di derivazione D, ha cominciato col dimostrare che ogni espressione della forma

$$A(\varphi) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi,$$

dove le α_n sono funzioni analitiche delle x regolari entro un'area finita, rappresenta una operazione distributiva a senso unico che ha un campo di validità comprendente infinite serie di potenze.

Egli risolve di poi, con grande semplicità di mezzi, le due questioni:

a) Data la successione $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ determinare quella delle funzioni $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$ che la operazione $A(\varphi)$ definita mediante la serie dianzi considerata, fa corrispondere alle potenze intere, nulle e positive della variabile.

b) Data una operazione $A(\varphi)$ per mezzo della successione ξ, dei valori che essa fa corrispondere alle potenze intere, nulla e positiva della variabile, determinare le α_n per modo che essa sia rappresentabile dalla serie $\sum_{0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n(\varphi)$.

Stabiliti questi punti, egli introduce il concetto di *derivata funzionale* $A'(\varphi)$, mediante la espressione

$$A'(\varphi) = A(x\,\varphi) - x\,A(\varphi)$$

che rappresenta lo scarto della operazione A dalla commutabilità con la operazione M_x, di moltiplicazione per x.

Digitized by Google

Le regole di derivazione funzionale sono una immediata estensione di quelle di derivazione ordinaria. In particolare la derivata della operazione M di moltiplicazione è uguale allo zero, quella della operazione D di derivazione è uguale ad 1, ciò che fa considerare le operazioni M e D come analoghe, nel calcolo delle operazioni distributive, a ciò che sono rispettivamente la costante e la variabile indipendente nella teoria delle funzioni.

Con la introduzione di questi concetti le serie studiate a principio del Capitolo conducono alle espressioni:

$$A(\varphi) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^{(n)}(1)\, D^n(\varphi)$$

$$A(\mu\varphi) = \Sigma \frac{1}{n!} A^{(n)}(\mu)\, D^n(\varphi)$$

delle quali è manifesta l'analogia con la serie del Taylor, nella ordinaria teoria delle funzioni.

Nel seguito del capitolo si studiano le potenze negative del simbolo D, e le serie di potenze di D.— [1]

Il Cap. VII contiene alcune applicazioni immediate di quelle formule.

Anzitutto si considera il caso che le funzioni α_n si riducano tutte a costanti numeriche. Le operazioni rappresentate dagli sviluppi $\Sigma \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi$ sono in quel caso commutabili con la derivazione, e reciprocamente. Da ciò un facile modo per istudiare le proprietà caratteristiche di tali operazioni.

Come seconda applicazione si trova lo spazio di radici di una forma lineare a coefficienti numerici in una data operazione distributiva a senso univoco; quesito che comprende come casi speciali l'integrazione di equazioni lineari a coefficienti costanti, differenziali od alle differenze finite.

Tornando alle operazioni commutabili con la derivazione, si trova che desse fanno corrispondere alle potenze x^n positive, intere della variabile, dei polinomi π_n del grado indicato dall'indice, detti *polinomi di Appell*, e dei quali si studiano le proprietà principali. Risalendo di nuovo alla espressione $A(\varphi) = \Sigma \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi$, e supponendo che α_n sia un polinomio di Appell di grado n^{esimo} ($n = 1, 2, 3 \ldots$) si trovano tutte le operazioni che trasformano uno spazio ad infinite dimensioni in uno spazio ad un numero finito di dimensioni.

In fine si dà un cenno delle equazioni simboliche e si studiano con sufficiente larghezza due tipi speciali, assai importanti, di tali equazioni.

Digitized by Google

Si è già avvertito che una operazione funzionale è completamente determinata dalla successione ξ_n delle funzioni che dessa fa corrispondere alle potenze intere, nulla e positiva, della variabile.

Sotto questo punto di vista sono da considerare in primo luogo, come le più semplici di tutte, quelle operazioni che ad x^n fanno corrispondere espressioni della forma $a_n x^n$.

Tali operazioni sono dette *normali dell' ordine zero*, e sono in generale dette *normali dell' ordine p*, quelle che fanno corrispondere alle x^n una successione di polinomi della forma:

$$\xi = x^n \left(a_{n.0} + a_{n.1} x + \ldots + a_{n.p.} x^p \right)$$

Il Cap. VIII è appunto dedicato allo studio di tali operazioni, e questo studio è fatto con profondità di concetti, e semplicità di metodo, in modo da esaurire completamente l' argomento. Si noti a questo proposito che, come lo stesso Prof. Pincherle ha fatto notare nei suoi appunti di calcolo funzionale (Rend. Ist. Lombardo 1897) il metodo qui tenuto per lo studio delle operazioni normali, può con successo essere applicato a qualunque operazione distributiva a senso unico.

Il Cap. IX tratta della operazione aggiunta. La definizione che qui si dà di aggiunta è quella che conduce più rapidamente alla conoscenza delle relazioni fra una data operazione e la sua aggiunta.

Mi si permetta però di dire che quella definizione pare a tutta prima alquanto vaga, e sconcerta un poco il lettore, forse perchè non è immediatamente legata coi risultamenti conseguiti nei capitoli precedenti. Forse apparirebbe più semplice e naturale partire da una elegantissima proprietà che può servire da definizione della aggiunta, che il Pincherle stesso ha trovata fino dal 1898 (Sulle operazioni aggiunte — Rendiconti Acc. di Bologna), e che si enuncia brevemente così:

Indicando con

$$\underset{n.}{\xi} = \underset{n.0}{a} + \underset{n.1}{a} x + \underset{n.2}{a} x^2 + \ldots$$

la funzione A (x^n), si ha il quadro

$$\begin{cases} a_{0.0}, & a_{0.1}, & a_{0.2} \cdots \\ a_{1.0}, & a_{1.1}, & a_{1.2} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

atto a definire la operazione A. Il quadro che definisce la aggiunta della A, si ricava da quello cambiando le linee in colonne.

Digitized by Google

La teoria generale delle operazioni distributive è nuovamente interrotta per dar luogo a due importantissime applicazioni, riguardanti le forme lineari differenziali ed alle differenze finite.

La teoria delle forme alle differenze è svelta nel Capitolo IX, seguendo le idee già esposte dal Pincherle in parecchi lavori, e specialmente nella sua: Algebra delle forme lineari alle differenze (Bologna (1895) e nel suo corso sulle funzioni ipergeometriche (giornale di Battaglini 1894). Risultamenti notevoli ed in parte nuovi, sono quelli relativi alla determinazione del campo di variabilità della variabile indipendente e degli spazi di funzioni che formano gli elementi di questo campo, all'estensione del concetto di campo di razionalità, di moltiplicatori, ed alle serie di potenze del simbolo θ di accrescimento finito. Sono notevoli anche una formula di interpolazione corrispondente a quella nota in Algebra col nome di Lagrangia, e la risoluzione del problema della inversione di una data forma lineare alle differenze.

La teoria delle forme differenziali lineari è riassunta nei Cap. XI e XII.

Le idee si svolgono con lo stesso ordine che fu osservato per le forme alle differenze, e questa uniformità di metodo contribuisce alla chiarezza e brevità della esposizione. Le dimostrazioni poi, spesso originali, sono sempre date nel modo che appare più facile ed elegante.

Gli argomenti principali trattati in questi capitoli si riferiscono all'Algebra delle forme lineari differenziali — teorema del Fuchs, Wronskiano, — spazi di radici — campi di razionalità — moltiplicatori — inversione — serie di D^{-1} — equazione fondamentale — gruppo di monodromia — sottogruppi di Hamburger — punti singolari normali — equazione determinante — forme ed equazioni del Fuchs — equazione ipergeometrica.

La teoria generale è ripresa al Cap. XIII sotto un nuovo punto di vista; quello cioè delle trasformazioni che può subire un'operazione per effetto di un'altra, nel senso usato nella teoria generale delle operazioni e in particolare in quelle delle sostituzioni.

Gli A. si fermano a considerare le trasformazioni della operazione di moltiplicazione per x, in una altra operazione comunque definita A. Chiamano *operazione trasformatrice* della A quella che eseguisce una tale trasformazione, e dopo aver date le proprietà fondamentali comuni a tutte le operazioni trasformatrici, incominciano a studiare partitamente le trasformatrici della derivazione. Fra queste ultime, si presentano come casi particolari quella detta di *Laplace*, così importante in tanti rami dell'Analisi, ed altra, a quella analoga, detta di *Borel*.

Le operazioni trasformatrici non sono, in generale determinate in

Digitized by Google

modo unico, ma si può sempre fissare una fra le infinite determinazioni e considerare quella come principale.

Così, volendo definire la derivata di ordine s mediante una espressione della forma

$$X\, x^{s}\, X^{-1}$$

dove X indica la operazione trasformatrice della derivazione, converrà poi fissare per X una particolare determinazione. Scegliendo la trasformazione L di Laplace, si ha una operazione

$$E_{s} = L\, x^{s}\, L^{-1}$$

che fu detta dallo Schlesinger *trasformazione di Eulero,* e della quale si studiano quì le proprietà più importanti.

Il Cap. XIV tratta delle forme lineari alle sostituzioni. I risultamenti ottenuti su questo soggetto dal *Königs* e dal *Grévy,* discendono immediatamente dalla teoria generale e sono qui esposti con lo stesso metodo seguito per le forme alle differenze e per quelle differenziali.

Il libro ha ancora un capitolo dedicato alla generalizzazione del Wronskiano ed un ultimo in cui si dà un cenno sulla geometria degli spazi lineari di cui le funzioni sono i punti. Sviluppando e completando una nota stampata nei Rendiconti della Accademia di Bologna, l'anno 1897, si dà qui un nitido abbozzo di un nuovo ramo del calcolo operatorio che già promette frutti abbondanti e preziosi. Avendo introdotto, con artifizio ingegnoso, il concetto di omogeneità nelle considerazioni sullo spazio generale delle serie di potenze, si mostra anzitutto come i risultamenti conseguiti nei primi capitoli dell'opera sieno applicabili anche allo spazio così considerato. Si introduce poi il concetto analitico di punto e piano, si definiscono quelli di curva, di superficie, di varietà di ordine superiore in questo spazio, di gruppo finito continuo di operazioni, rendendo così possibile, nel campo funzionale, l'uso del linguaggio geometrico e la introduzione di quei punti di vista e di quei metodi che resero così fecondi i lavori del Lie. Alcune note, poste in fine al volume, contengono: una copiosa e ben ordinata bibliografia, la soluzione della equazione funzionale, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, alcune osservazioni critiche e storiche sulla teoria dei divisori elementari, una brevissima esposizione dei risultamenti fino ad ora ottenuti nella teoria delle operazioni distributive di più funzioni, o di una funzione di più variabili; in fine, un cenno sulle operazioni non distributive.

ETTORE BORTOLOTTI.

Digitized by Google

M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band.* von 1668-1758. Mit 147 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1901, 8.° gr., p. x-+ 923. [Prezzo 20 Mk.].

La giovanile energia spiegata dall' illustre autore nel preparare e la diligenza somma da lui posta nel curare la seconda edizione della sua grande opera, avevano fatto nascere la speranza in molti che un *quarto volume* venisse a renderla più completa; ma sgraziatamente egli, nelle prime linee della Prefazione al volume che ci sta dinnanzi, ce ne toglie ogni speranza. Il rimpianto di tale irrevocabile decisione non ci deve indurre a biasimare chi la prese, dal momento che pochi hanno quanto il Cantor diritto a riposare, pochi potendo vantare mezzo secolo di ininterrotto e fruttifero lavoro.

La nuova edizione della *Vorlesungen* differisce dalla precedente per innumerevoli ritocchi ed aggiunte; un metodo grossolano per misurarne l' entità è offerto dal progresso nel numero delle pagine.

I.ª ed. I Vol.: VIII + 804; II Vol.: X + 863; III Vol.: XIV + 893.
II.ª ed. I Vol.: VII + 865; II Vol.: XII + 943; III Vol.: X + 923.

Ritocchi ed aggiunte provengono dalle ricerche sulla storia della matematica che, per l' impulso del Cantor, vennero fatte in questi ultimi anni, onde si può dire che egli abbia già raccolti molti frutti delle numerose piante da lui seminate. Descriverli qui partitamente sarebbe cosa lunga, tediosa ed inutile. Piuttosto, siccome chi scrive queste linee ha fede che dell' opera del Cantor non tarderà a manifestarsi imperioso il bisogno di una terza edizione, così si permette di dare qualche suggerimento ed esprimere qualche desiderio di cui spera vedere tenuto conto nel relativo lavoro preparatorio.

I. Anzitutto notiamo che, nel II Vol., andava fatto almeno un cenno della memoria del Roberval *De geometrica planarum et cubicarum aequationem resolutione,* non soltanto come attestazione del fatto che l'autore, dopo di essersi schierato fra gli oppositori della nuova Geometria analitica, aveva finito per persuadersi del proprio errore, ma anche perchè quello scritto contiene una delle più antiche esposizioni di tale scienza e non è indegno di chi ha legato il proprio nome a tante belle ricerche geometriche (1).

II. Dei due dizionarî matematici, di cui il Cantor indica la esistenza a p. 270 e 510, quello dell' Ozanam (*Dictionnaire mathématique ou Idée générale des mathématiques,* Amsterdam, 1691) non corrisponde all' idea che oggi abbiamo di una opera di quella specie: è piuttosto

(1) Va anche avvertito che il celebre Borelli (v. II, p. 661) chiamavasi *Giovanni,* non *Giacomo.*

Digitized by Google

una raccolta di definizioni e nozioni generali di algebra e geometria e delle scienze applicate che su queste si fondano, sino all' architettura navale e la musica inclusive: però l' indice alfabetico dei termini adoperati, che chiude l' opera, rende questa utile anche come opera di consultazione. Invece il *Dictionnaire universel de mathématique et de physique* del Saverien (2 vol., Paris 1753) è redatto secondo il piano oggi generalmente adottato per opera di tal genere; Clairaut, incaricato di esaminarne il manoscritto, non esitò a dichiararne « l'impression utile au public », e tale giudizio merita l' approvazione generale; della qual cosa si meraviglieranno forse quei lettori che ricordano con quale critica rovente il Nesselmann (1) abbia stigmatizzata un'altra opera del Saverien.

III. Riguardo a William Jones (Cantor, III, p. 306) si può osservare che gli editori della 2.ª ed. delle *Philosophical Transactions* gli attribuirono l'articolo *The construction of a quadratrix to the circle being the curve described by its equable evolution;* ma chi scrive (2) ed il Prof. Wölffing (v. questo *Bollettino*, T. III, 1900, p. 98), indipendentemente l' uno dall' altro, osservarono esserne invece autore J. Perks.

IV. Dionigi Diderot (1713-1784), il noto letterato francese che il Cantor ricorda (p. 510) soltanto pei suoi contributi all' *Encyclopédie*, ha pubblicato a Parigi nel 1748 un volumetto di cinque *Mémoires sur différents sujets de mathématiques*, di cui particolarmente il secondo interessa i geometri, avendo per soggetto l'evolvente di circolo.

V. Guido Grandi — di cui il Cantor cita un' opera geometrica (p. 774) — meriterebbe più lungo discorso; sarebbe desiderabile anzi che alla sua opera matematica venisse dedicato uno speciale lavoro, da qualcuno che sfruttasse, oltre alle sue pubblicazioni, i manoscritti ed il carteggio conservato nella Biblioteca dell' Università di Pisa. Intanto il Vacca ha assodato (v. questo *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 33-34) essere a lui, non a Gaetana Agnesi, che si deve far risalire la concezione della *versiera*.

VI. La memoria giovanile di Clairaut (Cantor, T. III, p. 779) tratta, non soltanto di speciali curve del quart' ordine, ma anche di certe curve di ordine qualunque applicabili all' inserzione di quante si vogliano medie proporzioni fra due rette date.

VII. Una delle due opere di maggior valore che, nel campo della geometria, produsse l' Italia nel Sec. XVIII è quella del bresciano Conte Giambattista Suardi che porta il titolo: *Nuovi istrumenti per*

(1) *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p, 26 e seg.

(2) V. pag. 418 e 424 dell' opera di imminente pubblicazione: *Spectelle Kurven der Ebene, algebraischen und transcendenten. Theorie und Geschichte.* (Leipzig, Teubner, 1902)

Digitized by Google

la descrizione di diverse curve antiche e moderne e di molte altre, che servir possono alla speculazione dei geometri, ed all' uso de' pratici. Col progetto di due nuove macchine per la Nautica ed una per la Meccanica, e con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari (Brescia, MDCCLII, 4.°, pag. VIII + 283, con 33 Tav,).

I nuovi apparti inventati sono non meno di dieci. Il I serve alla descrizione delle concoidi, non solo di quelle di Nicomede, ma anche di quelle a base circolare; va notato che il Suardi, con quanta ragione non so, attribuisce (pag. 5) a Maria Gaetana Agnesi la considerazione della concoide di Nicomede *nodata*. Il II concerne la cissoide, ma, con lievi modificazioni, serve anche per la cardioide, che il Suardi chiama *Curva di M.r Carré*. Il III serve al tracciamento della quadratrice di Dinostrato e il IV (che non è il migliore) per quello delle coniche. Per delineare la logaritmica e la trattrice (*trattoria di Perralto*, secondo la nomenclatura dell' autore) si ricorra al V apparato e al VI per tracciare la cicloide ordinaria. Alla descrizione dell' istrumento (il VII) « per le ovali di Cartesio applicate alle refrazioni » il Suardi premette due interessanti lettere (datate 16 Marzo e 27 Aprile 1748) del P. Boscovich riflettenti le più cospicue proprietà di siffatte curve. Più interessante è l' istrumento (IX) dall' autore chiamato *Penna geometrica;* esso serve a descrivere non meno di 1273 curve differenti, fra le quali si trovano la retta, l' ellisse, il circolo, le rodonee, le cicloidi a base circolare (epicicloidi ed ipocicloidi) e le spirali. Va notato come il Suardi abbia constatato, senza però insistere sul valore teorico di tal fatto, che la descrizione organica delle cicloidi a base circolare serve anche per le rodonee; se vi avesse prestata maggiore attenzione e di più avesse determinato sotto quali condizioni un' epicicloide od ipocicloide diviene una rodonea, avrebbe antecipato di quasi un secolo la scoperta di una proprietà assai notevole avvertita un secolo più tardi dal Ridolfi (*Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione*, Firenze 1844) e poi di nuovo dal Durége (*Ueber eine besondere Art cyclischer Curven*, Zeitschrift für Matematik und Physik, T. IX, 1864). La penna geometrica è un caso speciale di un altro apparecchio composto di un maggior numero di mobili e di cui il Suardi espone i molteplici usi. – L' ultimo degli strumenti geometrici inventato dal nostro geometra serve alla descrizione organica della lossodromia e dei poligoni rettilinei regolari. — Non è il caso di arrestarci sopra alcune innovazioni apportate dal Suardi alla vite d' Archimede e su altre due macchine ideate da lui (*quadrante lossodromico o sia Istrumento per rilevare la quantità del viaggio di un Bastimento; Barca che va da sè contro alla corrente di un Fiume*), chè esse nulla hanno a che vedere con la geometria pura; ma va invece fatta menzione

Digitized by Google

dell'ultima sezione dell'opera in discorso, ove sono esposte delle notevoli proposizioni elementari concernenti i poligoni regolari, di 3, 4,..., 12 lati, nonchè quelli di un numero qualsivoglia; la raccomandiamo a chi scrive trattati elementari di geometria, perchè ivi si trovano alcune proposizioni che varrebbe la pena di rimettere in circolazione.

Di ciascuno degli strumentati che descrive il Suardi dà la rappresentazione su un piano verticale e su uno orizzontale, ed inoltre (sotto il nome di Scenografia) una in prospettiva; la semplice ispezione di queste belle figure è sufficiente a dimostrare quanto fra i pratici fossero diffusi, prima che Monge vedesse la luce, i metodi propri della Geometria descrittiva.

I copiosi richiami fatti dal Suardi ad opere di contemporanei dimostra sragionevole l'opinione che, solo a partire dal 1850 circa, gli Italiani abbiano cessato di essere dei solitari nella scienza.

VIII. In una ventura edizione dell'opera del Cantor chiediamo un cenno anche sopra Gregorio Casali (1721-1802), la cui memoria *De conicorum sectionum focis* (Instituti Bononiensis Commentarii, T, IV, 1757) è importante per le ricerche ivi istituite intorno alla strofoide (cfr. questo *Bollettino*, T. I, 1898, p. 2-3), e sopra il Padre G. B. Caraccioli, il cui *De lineis curvis liber* (Pisis, 1740), non è per fermo inferiore ad altre opere coevi menzionate nella *Vorlesungen*.

G. L.

C. Arzelà. — *Lezioni di Calcolo infinitesimale date nella R. Università di Bologna.* Vol. I, P.te I. - Firenze, Successori Le Monnier, 1901, 8.°, pag. IV + 437. [Prezzo L. 9].

La pubblicazione del corso del prof. Arzelà era particolarmente desiderabile, perchè egli fu il primo che introdusse nelle Università italiane l'insegnamento promiscuo dei due Calcoli, differenziale e integrale. Il volume ora venuto in luce contiene il Calcolo infinitesimale delle funzioni d'una variabile; la seconda parte di questo primo volume sarà dedicata alle funzioni di più variabili; il secondo volume tratterà delle applicazioni geometriche, delle equazioni differenziali e del calcolo delle variazioni.

Il nome dell'autore è troppo noto perchè occorra dire che la sua opera riunisce i due pregi difficilmente conciliabili del rigore e della chiarezza.

Novità degne di nota sono:

Alcuni teoremi sulle successioni;

Qualche semplificazione nella dimostrazione del teorema sulla integrabilità del prodotto di due funzioni integrabili;

Digitized by Google

La dimostrazione del teorema sulla derivata d'una funzione di funzione ridotta a forma semplicissima senza danno del rigore;

La teoria dell'integrazione per sostituzione, dove trovasi riprodotto il contenuto d'una interessante nota dell'autore inserita nei *Rendiconti dell'Accademia di Bologna*;

La riduzione di qualunque integrale della forma:

$$\int f(x, \sqrt{a x^2 + b x + c})\, dx$$

all'unico integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + b x + c}}$$

(riduzione che non sappiamo però se in pratica sia conveniente);

La teoria dei differenziali binomi presentata in modo molto semplice;

Alcuni sviluppi sugli integrali impropri;

La teoria della lunghezza d'un arco di curva piana svolta con estensione maggiore del solito.

Naturalmente un libro di lunga lena non può andare esente da qualche piccolo neo; e ci sia permesso osservare che nella teoria delle successioni troviamo inutile limitarsi alle sole successioni numerabili; che il teorema *g*) a p. 59 poteva essere facilmente dimostrato in condizioni alquanto più generali; che la dimostrazione della formola per la decomposizione delle frazioni razionali nel caso di radici complesse data a p. 223-224 è inesatta; che, a proposito della dimostrazione *k*) a p. 393 si poteva osservare che essa vale anche se le derivate $u_1'(x), u_2'(x), \ldots$ non sono continue.

Per dare un'idea dell'ordine in cui è disposta la materia del presente volume, ne riportiamo l'indice:

1. Limiti, gruppi di numeri o di punti. 2. Funzioni, integrale definito, continuità. 3. Infinitesimi ed infiniti. 4. Derivate. 5. Differenziale. 6. Teorema del valor medio. 7. Integrale definito, teoremi sopra le derivate e gl'integrali, integrazione per sostituzione. 8. Integrazione delle funzioni razionali, irrazionali e trascendenti. 9-10. Integrali impropri. 11. Lunghezza d'un arco di curva. 12. Derivate e differenziali successivi, formola di Taylor abbreviata. 13. Espressioni indeterminate. 14. Massimi e minimi. 15. Serie di funzioni. 16. Serie di Taylor e di Mac-Laurin. G. VIVANTI.

F. ENRIQUES. — *Lezioni di geometria descrittiva, pubblicate per cura del Dottor* UMBERTO CONCINA. Con 24 Tavole. Bologna, Zanichelli 1902, 8.°, pag. XI + 421 [Prezzo L. 12].

Nell'accingermi a rendere conto di questa nuova opera, con cui l'Egregio Professore della Università di Bologna ha arricchita la

Digitized by Google

collezione di manuali destinati all'istruzione dei futuri ingegneri e dei matematici dell'avvenire (1), giudico opportuno di segnalare anzitutto ai lettori del *Bollettino* quali siano gli argomenti trattati e quale sia l'ordine nel quale essi si seguono:

Parte Prima. — Metodi di rappresentazione. *Metodo della proiezione centrale.* Cap. I. Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici. Cap. II. Problemi metrici. Cap. III. Cambiamento del sistema di proiezione centrale. *Metodo delle proiezioni ortogonali.* Cap. IV. Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici. Cap. V. Problemi metrici. Cap. VI. Cambiamento del sistema delle proiezioni ortogonali. Cap. VII. Rappresentazione dei poliedri. Capitolo VIII. Proiezioni assommetriche. Cap. IX. Proiezioni quotate.

Parte Seconda. — Elementi di una teoria delle linee e delle superficie. Cap. I. Linee piane e coni. Cap. II. Linee gobbe e sviluppabili. Capitolo III. Curve algebriche gobbe; Cubica e Quartica di 1.ª specie. Cap. IV. Le quadriche. Cap. V. Proprietà generali delle superficie. Cap. VI. Le superficie rigate. Cap. VII. Le superficie di rotazione. Cap. VIII. Gli elicoidi. Cap. IX. Dei monoidi e della superficie cubica.

Come si scorge nel libro del Prof. Enriques è, su per giù, svolto il programma consueto dei nostri corsi universitari di geometria descrittiva; se l'A. non parlò del cambiamento di posizione delle figure obbiettive rispetto agli elementi di riferimento, gli è che egli condivide l'opinione di molti, che siffatto artificio — come del resto anche quello del cambiamento di proiezione — non presta in pratica quei servigi che eransi sperati ai tempi dell'Olivier. Ciò invece che può recare meraviglia è che non sia stata inserita la risoluzione dell'angolo triedro; ed io non so con quale fondamento sia stata decisa tale esclusione; giacchè i problemi fondamentali sopra questa figura hanno una notevole importanza teorica per due ragioni. La prima è che offrono l'esempio di costruzioni che, anche adoperando il metodo di Monge, non esigono che un solo piano di riferimento. La seconda è che permettono di ottenere nel modo più semplice e naturale le formole fondamentali della trigonometria sferica, le quali rischiano assai spesso di non trovare

(1) Siccome molti a torto ritengono che la Geometria descrittiva, come disciplina applicata, non meriti gran fatto l'attenzione dei futuri professori, credo bene di rilevare come una recente inchiesta fatta in Germania abbia reso manifesto come molti insegnanti abbiano avvertito sensibilmente la lacuna che esisteva nella loro istruzione per la mancanza di un regolare insegnamento di quella disciplina, il quale avrebbe, fra l'altro, fornito loro quell'abilità nel disegno di cui sentivano vivamente il bisogno. In conseguenza negli ultimi programmi d'insegnamento tedeschi venne esplicitamente introdotta la disciplina in questione. Per maggiori particolari veggasi l'interessante resoconto del Prof. Stäckel *Ueber die Entwickelung der Unterrichtsbetriebes in der angewandter Mathematik an der deutschen Universitäten* (Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, T. XI, 1902).

Digitized by Google

posto in alcuno dei nostri corsi ufficiali di matematica; in pari tempo esponendo tale deduzione si giunge a dimostrare essere vero, ciò che si legge nelle più comuni definizioni della Geometria descrittiva (1), che questa scienza guida a *scoprire* e abilita a *dimostrare* le proprietà delle figure di cui insegna la rappresentazione.

Riguardo al programma svolto giudico conveniente rilevare qui essere mio convincimento sarebbe ottima cosa apportare un complemento alla I Parte suggerito dalle applicazioni sempre crescenti che la fotografia trova nella topografia e nei rilievi sul terreno. Coerentemente a questa opinione sin dallo scorso anno io ho introdotto nel mio corso un capitolo sopra i « fondamenti teorici della fotogrammetria », nel quale ho compendiati i metodi (dovuti specialmente all' Hauck ed al Finstenvalder) con cui date due proiezioni centrali di una stessa figura si può dedurne una terza (2). Così, mentre i futuri ingegneri furono preparati a rendersi ragione dei procedimenti che fanno parte della fototopografia, gli studenti che si avviavano ad una laurea, appresero l' esistenza di corrispondenze geometriche *(trilineari)* di natura diversa da quelle che erano state vennero loro rivelate dalla Geometria proiettiva.

La divisione in due parti dell'opera del Prof. Enriques, non è già un semplice portato delle necessità di dare di quando in quando un po' di riposo a chi legge, ma deriva dalla presenza nella Geometria descrittiva di due sezioni piuttosto artificialmente collegate l' una all'altra e che si devono trattare con criterî molto differenti. La prima, come semplice applicazione dei concetti fondamentali della Geometria di posizione, è un vero capitolo di geometria pura: sul carattere che essa possiede non può sorgere dubbio di sorta sicchè — dopo Monge e Fiedler — fra i vari autori non esistono che differenze in certi punti di dettaglio; nel fondo vi è accordo di sostanza e di forma. Ma la seconda invece, avendo per iscopo l'applicazione dei metodi esposti nella prima a curve e superficie ha un piano che non si riesce a delineare con esattezza. Praticamente si risolve la questione di tracciarlo introducendovi 1.° gli elementi della teoria delle curve (piane e sghembe) e delle superficie, 2.° l'applicazione dei metodi di rappre-

(1) Non è fuor di luogo osservare qui come il Prof. Enriques non indichi alcuna definizione della disciplina che insegna.

(2) Il tempo a mia disposizione essendo esiguo, dovetti limitarmi alle cose più essenziali; eccone un breve sommario: *Relazione che intende fra due proiezioni centrali della medesima figura. Fulcri; loro funzione. Teorema fondamentale. Determinazione di uno dei fulcri conoscendo l'altro e le due proiezioni di cinque punti qualunque dello spazio. Determinazione dei due fulcri conoscendo le due proiezioni di sei punti, quattro dei quali posti in un piano. Rapporti esistenti fra questa costruzione ed il « problema della proiettività » nel piano. Risoluzione del problema della fotogrammetria. Cenno sopra alcuni casi particolari di esso, importanti in pratica.*

Digitized by Google

sentazione alle superficie che teoricamente o praticamente offrono maggiore interesse. Ora poichè queste superficie (quadriche, rigate, superficie di rivoluzione, ecc.) hanno una definizione geometrica molto semplice e chiara, il rappresentarle e trovarne gli elementi tangenti, normali, ecc. non presenta sostanziali di difficoltà; onde qui pure è difficile trovare fra autore ed autore delle insormontabili discrepanze. Il punto di dissenso rimane concentrato nella sezione teorica della seconda parte. Esso scomparirebbe ove si fosse in possesso di una teoria geometrica delle curve e superficie: ma questo desiderio è ben lungi dall'essere appagato, nemmeno se ci si limita a figure algebriche (1). In tale stato di cose, alcuni trattatisti, volendo ad ogni costo serbare alla Geometria descrittiva l'apparenza di un capitolo di geometria pura, ponendo in non cale l'esigenza del rigore, che in nessun caso si dovrebbe trascurare, ricorsero ai « procedimenti della Geometria infinitesimale sintetica, che (come giustamente osserva il nostro Autore) non possono veramente riguardarsi come procedimenti di prova ». Altri invece, ritenendo ormai antiquata e scolastica la distinzione fra geometria analitica e sintetica, introdussero francamente la rappresentazione analitica di curve e superficie. Gli è il sistema a cui, *soltanto in parte*, ricorse il nostro autore; e così fu astretto (come egli sinceramente riconosce nella Prefazione) a « sacrificare bene spesso il rigore ». Ora io credo che sia assai migliore sistema di escludere totalmente le considerazioni infinitesimali sintetiche ed erigere tutto l'edificio della II Parte sopra una larga e solida piattaforma analitica.

Immensi sono i vantaggi che così si ottengono senza acrescere le difficoltà dello studente; non soltanto si ha così modo di notare come *non* ogni curva o superficie ammette rette tangenti, piani osculatori, piani tangenti in ogni suo punto, ma di assegnare alcuni criteri semplici per accertarsi quando tale circostanza si verifichi. Inoltre, la maggiore parte delle figure, di cui la teoria e la pratica offrono esempi, sono definite mediante equazioni, onde importa che lo studente abbia a propria disposizione i metodi generali per investigarli, che solo l'analisi è *oggi* capace di somministrare. Non va poi dimenticato che, posto che siansi solidamente i fondamenti mediante considerazioni algebriche, si possono svolgere poi con piena sicurezza le ulteriori conseguenze, col puro ragionamento. Nè si tema che, seguendo tali indicazioni, si tragga la disciplina che ci occupa sopra una via diversa da quella che le assegnò il suo creatore; colui che, fra l'una e l'altra delle lezioni di Geometria descrittiva, scriveva le immortali sue *Appli-*

(1) Tale limitazione d'altronde sarebbe sconsigliabile, tante essendo le figure trascendenti di cui la pratica chiede la rappresentazione alla geometria descrittiva.

Digitized by Google

cations de l'analyse à la géométrie, colui che più d'ogni altro scienziato del secolo XVIII ebbe chiara la visione dell'essere la geometria una scienza una nelle sue molteplici manifestazioni, non potrebbe protestare se i posteri sfruttano alcuni dei metodi che da lui rampollano per lumeggiare e rendere più solida la disciplina a cui egli ha dato un'impronta personale e definitiva.

Se nel rendere conto di queste *Lezioni* del Prof. Enriques ho manifestato alcuni punti in cui il mio accordo con lui non è perfetto, gli è che ritengo al critico, mosso soltanto dall'amore per la scienza e dall'interesse per l'insegnamento, doversi concedere « liberi sensi e libera parola ». E mi è caro constatare finendo che, malgrado le obbiezioni fatte, colla comparsa dell'opera esaminata, la letteratura matematica italiana annovera un buon libro di più (1).

G. L.

W. F. MEYER. — *Differential - und Integralrechnung.* Erster Band. Differentialrechnung. — Leipzig, Göschen, 1901, 8.°, p. XVIII + 395. (Sammlung Schubert X). [Prezzo del Vol. legato Mk. 9].

Questo libro si stacca assai dalla maggior parte dei trattati di Calcolo per la scelta e l'ordine della materia e per la proporzione delle varie parti.

Esso si divide in due sezioni, d'estensione pressochè eguale, di cui la prima tratta dei limiti e delle derivate, la seconda delle serie.

La prima sezione comincia (§ 1) col teorema elementare, che a^n, al tendere di n ad ∞ per valori interi e positivi, tende ad ∞ o a 0 secondochè $a \gtrless 1$, e che in ambi i casi $\sqrt[n]{a}$ tende ad 1. Applicazioni analitiche di questo teorema sono (§ 2) la formola per la somma d'una progressione geometrica e il teorema della continuità della funzione a^x; applicazioni geometriche (§§ 3, 4) la quadratura della parabola e d'altre curve riferite a coordinate cartesiane o polari, e la cubatura d'alcuni corpi rotondi. L'introduzione del concetto di limite nella Geometria conduce anche (§ 5) all'espressione d'un arco circolare mediante funzioni trigonometriche ed alla determinazione dell'equazione della tangente al cerchio ed alle coniche. Tornando allo studio delle potenze, e cercando di paragonare fra loro potenze di base diversa con esponente (intero e positivo) eguale, si ottiene (§ 6) la formola del binomio, la quale dà occasione di definire (algebricamente) le derivate d'una potenza. Di qui si passa (§ 7) allo studio delle funzioni

(1) Nell'eventualità, non improbabile, di una nuova edizione, raccomanderei di rettificare l'ortografia dei nomi Bernoulli e Schläfli!

Digitized by Google

razionali intere, alle quali si estende il concetto di derivata; stabilita (§ 8) la continuità di tali funzioni, si dimostra che la derivata d'una funzione intera è il limite del suo rapporto incrementale. Assumendo d'ora innanzi questa proprietà della derivata come definizione di essa, nulla vieta di applicare il concetto di derivata a funzioni diverse dai polinomi; così vengono calcolate le derivate delle funzioni trigonometriche e delle loro inverse (§§ 9, 10), ciò che porge l'occasione di definire in generale la funzione di una variabile e di stabilire il teorema sulla derivata della funzione inversa, — poi le derivate di una potenza ad esponente qualunque (§ 11), donde si è condotti alla definizione delle funzioni di funzioni, — infine quelle del logaritmo e dell'esponenziale (§ 12). Tutti questi sviluppi sono accompagnati dal calcolo dell'errore che si commette sostituendo alla derivata il rapporto incrementale, calcolo che — nota giustamente l'autore — è di grande interesse nelle applicazioni dell'Analisi alle scienze naturali. Nel paragrafo successivo (§ 13) vengono dati i teoremi sulla derivata d'una somma, d'un prodotto, ecc., e sulla derivazione delle funzioni implicite e delle funzioni composte. Chiude la prima sezione una lunga serie di esercizi (§ 14).

Nella seconda sezione l'autore, richiamando lo sviluppo di Taylor dato dall'Algebra per le funzioni razionali intere, si domanda se è possibile, per una funzione qualunque $f(x)$, esprimere la differenza $f(a+h)-f(a)$ mediante la derivata prima della funzione. A tale quesito risponde (§ 15) la formola di Cauchy:

$$f(a+h)-f(a)=h\,f'(a+\theta h) \qquad 0<\theta<1,$$

che si fonda sul teorema di Rolle. Questa formola permette di ottenere facilmente, per le funzioni elementari, la *misura della continuità* (§ 16), cioè l'ampiezza d'un intervallo in cui l'oscillazione della funzione non oltrepassa un dato limite. Altre applicazioni della formola stessa sono il calcolo delle espressioni indeterminate (§ 17), la teoria dei massimi e minimi (§ 18), e infine lo sviluppo di Taylor (§§ 19, 20, 21). Segue la teoria generale delle serie (§§ 22, 23) e dei prodotti infiniti (§ 24).

Ed ora, per racchiudere in poche parole le nostre impressioni sul volume che ci sta dinanzi, diremo che esso ci pare un eccellente libro d'esercizi, con qualche digressione sulla teoria. — Anche dal breve riassunto che precede chi legge avrà potuto comprendere che l'autore ha adottato il metodo del passaggio dal particolare al generale, metodo ottimo nella prima istruzione, ma della cui efficacia nell'insegnamento superiore noi dubitiamo assai. Ma chi prende a sfogliare il libro stesso durerà fatica a rintracciare qua e là i varî teoremi generali, che fanno timidamente capolino tra un ammasso d'esempi e

Digitized by Google

di sviluppi particolari; e non potrà — se è nuovo alla materia — farsi alcuna idea di ciò che sia questa scienza che gli si ammanisce a magri bocconcini sperduti in un gran piatto di salse. Non è così che si devono nutrire gl' ingegni che vogliono essere addestrati nelle discipline matematiche; si potrà fare per via d' esempi della morale, della gramatica, fors' anche della geometria intuitiva, ma della matematica vera, no. Ci opporrà forse alcuno l' esempio di un libro che ha avuto una fortuna meritata, quello sulle applicazioni delle funzioni ellittiche di Greenhill; ma ci si conceda che il caso qui è ben differente.

Ad altre conseguenze ancora più gravi fu condotto l' autore dal desiderio di appianare la via agli studiosi; egli ha fatto astrazione quasi completamente da tutto quanto fu fatto da mezzo secolo in qua per ridurre il Calcolo infinitesimale ad una scienza rigorosa. Per citare soltanto i punti più salienti, ricorderemo i teoremi sulle funzioni di funzioni (p. 107) e sulle funzioni implicite (p. 150), il ragionamento a p. 110 dove si ammette tacitamente che il limite della derivata sia la derivata del limite, il teorema sull' inversione dell' ordine delle derivazioni (p. 311), e la definizione — inesatta e diversa da quella data prima in un caso speciale (p. 76) — della continuità delle funzioni di due variabili (p. 311). — Che sia opportuno presentare il Calcolo infinitesimale in forma possibilmente semplice a chi ne incomincia appena lo studio, è indubitato; ma la semplificazione non deve mai essere tale da condurre ad insegnare cose non vere. In nessun campo, più che in quello della matematica, è legge suprema il vecchio precetto: *sed magis amica veritas* (1)!

G. Vivanti.

G. Rost. — *Theorie der Riemann'schen Thetafunction.* — Leipzig, Teubner, 1901, 4.°, pag. IV+66.

L' autore di questo opuscolo si è prefisso lo scopo di esporre sistematicamente la teoria delle funzioni θ abeliane, quale è contenuta nelle classiche memorie di Riemann, completandola nei punti in cui essa è mancante. Il lavoro è scritto con ordine e chiarezza, e noi ne consigliamo la lettura a chiunque voglia apprendere i principii della teoria delle funzioni abeliane.

G. Vivanti.

(1) Cfr. la recensione su: Czuber, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Boll. di bibl., 1898, p. 98.

Digitized by Google

Annuaire pour l'an 1902 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars, p. IV + 656 + 34 + 91 + 15 + 7 + 38. [Prezzo fr. 1.50; franco 1.85].

Il piccolo volume che ci sta sott'occhio è degno di quelli che lo precedettero. Sono in esso condensate un'immensità di notizie di indiscutibile attendibilità ed insuperabile esattezza, necessarie all'ingegnere, al fisico ed all'astronomo, e utili ad ogni studioso. Si chiude con le seguenti « Notices scientifiques »:

POINCARÉ, *La télégraphie sans fil.*

CORNU, *Les courant polyphases.*

GUYON, *Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation.*

JANSSEN, *Observatoire du sommet du Mont Blanc (création et travaux).* G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI PAVIA.

Corso di Analisi superiore. Anno 1900-1901.

Il Corso di Analisi superiore che sviluppai nell'anno passato all'Università di Pavia trattò della *Teoria dei gruppi di trasformazioni di Lie.* Alla fine dell'anno impresi a scrivere e riordinare le lezioni, allo scopo di farne argomento di un volume, attualmente in corso di stampa presso l'editore Hoepli di Milano.

I numerosi volumi che il Lie, insieme ai suoi discepoli, pubblicò su questa teoria, geniale creazione sua, rappresentano, mi pare, una miniera troppo vasta perchè un principiante, nei suoi primi studii, possa in essa facilmente orientarsi; ed è perciò che io nutro fiducia che l'opera mia possa riuscire gradita agli studiosi.

Gentilmente invitato dal Chiar.^{mo} Direttore di questo periodico, pubblico ora ben volentieri il sommario del corso da me tenuto, attenenendomi però quasi sempre, per la disposizione della materia, all'ordine da me seguito nel suddetto volume in corso di stampa, in cui ho trovato anche necessario comprendere qualche altro argomento in più di quelli che potetti sviluppare nel corso, e sopprimerne invece qualche altro.

Milano, Novembre del 1901.

ERNESTO PASCAL.

Digitized by Google

CAPITOLO I.

Gruppi di trasformazioni in generale.

§ 1. Preliminari. Concetto di trasformazione. Parametri della trasformazione e condizioni perchè essi sieno essenziali. Esempi.

§ 2. Definizione di gruppi continui di trasformazioni. Gruppi finiti e gruppi infiniti. Gruppi di Lie. Simiglianza di due gruppi.

§ 3. Esempi di gruppi più comuni. Gruppi lineari, gruppi proiettivi, gruppi Cremoniani.

§ 4. Equazioni differenziali caratteristiche di un gruppo. Primo teorema fondamentale della teoria dei gruppi. Esempio.

§ 5. Gruppo ad un sol parametro. Esempio.

§ 6. Formole esplicite canoniche per le trasformazioni di un gruppo ad un parametro. Trasformazioni infinitesimali.

§ 7. Traiettorie di un gruppo ad un sol parametro. Riduzione a forma canonica dei simboli delle trasformazioni infinitesimali. Determinazione del gruppo canonico data la sua trasformazione infinitesimale.

§ 8. Proprietà varie dei simboli delle trasformazioni infinitesimali e relazioni fra loro. Formola di Jacobi. Ordine di una trasformazione infinitesimale in un determinato punto.

§ 9. Formola del prodotto di due trasformazioni finite poste sotto la forma canonica.

§ 10. Le espressioni $X f$ considerate come primi membri di equazioni a derivate parziali. Sistemi completi di $X f = 0$.

§ 11. Costruzione, mediante r trasformazioni infinitesimali indipendenti, di ∞^{2r} trasformazioni ad r parametri essenziali.

§ 12. Gruppi ad r parametri contenenti la trasformazione identica.

§ 13. Proprietà di un assieme di ∞^{2r} trasformazioni, le cui formole soddisfanno ad equazioni del tipo (A) del § 4.

§ 14. Gruppi ad r parametri in generale. Relazioni caratteristiche fra le r trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri avente la trasformazione identica. Secondo teorema fondamentale della teoria dei grnppi.

§ 15. Relazioni fra le costanti c. Terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi. Struttura di un gruppo. Bibliografia.

§ 15. Le trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri definite mediante un sistema di equazioni a derivate parziali.

Digitized by Google

CAPITOLO II.

Teoria generale dell' invariantività rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

§ 1. Invariantività di una funzione rispetto ad un gruppo. Invarianti di un grnppo.

§ 2. Invariantività di un sistema di equazioni finite rispetto ad un gruppo.

§ 3. Cenni sul problema di determinare tutti i possibili sistemi di equazioni, che ammettono una o più date trasformazioni infinitesimali.

§ 4. Caso in cui le trasformazioni infinitesimali date godono di una certa proprietà, o, più particolarmente, sono atte a generare un gruppo canonico ad r parametri. Sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo canonico ad r parametri.

§ 5. Rappresentazione geometrica dei sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo. Sottogruppo di stabilità relativo ad un punto.

§ 6. Invariantività di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, lineari, di 1.° ordine, omogenee, rispetto ad un gruppo.

§ 7. Invariantività rispetto ad un gruppo di un sistema di trasformazioni infinitesime. Il sistema delle trasformazioni infinitesime che appartengono ad un gruppo canonico ad r parametri, è invariante rispetto al gruppo stesso.

§ 8. Invariantività di una trasformazione o di un gruppo rispetto ad una trasformazione o ad un gruppo, e di un gruppo rispetto ad un gruppo, ovvero permutabilità di due trasformazioni, di una trasformazione e di un gruppo, o di due gruppi. Trasformazioni infinitesimali e sottogruppi caratteristici o invarianti di un dato.

CAPITOLO III.

Proprietà relative alla costituzione dei gruppi.

§ 1. Transitività dei gruppi.
§ 2. Imprimitività dei gruppi.
§ 3. Sistaticità di un gruppo.
§ 4. Isomorfismo di due gruppi.
§ 5. Similitudine di due gruppi.

Digitized by Google

CAPITOLO IV.

Gruppi aggregati ad un dato.

§ 1. Gruppo aggiunto.
§ 2. Gruppo di struttura.
§ 3. Gruppo parametrico.
§ 4. Gruppo di imprimitività.
§ 5. Gruppi ampliati.
§ 6. Gruppo reciproco di un gruppo semplicemente transitivo ad n parametri essenziali.

CAPITOLO V.

Teoria invariantiva dei gruppi ampliati.

§ 1. Invariantività delle equazioni e delle espressioni pfaffiane.
§ 2. Invariante simultaneo di una espressione pfaffiana e di una trasformazione infinitesimale.
§ 3. Sistema aggiunto di un dato sistema di equazioni pfaffiane. Sistemi completamente integrabili.
§ 4. Sistemi di equazioni pfaffiane congiunti invariantivamente al sistema dato. Bibliografia sulla teoria delle equazioni pfaffiane.
§ 5. Invarianti differenziali relativi ad un gruppo dato. Parametri differenziali.

CAPITOLO VI.

Trasformazioni di contatto.

§ 1. Invariantività per le trasformazioni puntuali ampliate a due variabili della speciale equazione pfaffiana $dy - p\,dx = 0$.

Definizione di traformazioni di contatto nel piano.

Loro espressione analitica generale e dimostrazione della loro esistenza.

Il prodotto di due trasformazioni di contatto è anche una trasformazione di contatto.

L' inversa di una trasformazione di contatto è anche una trasformazione di contatto.

Esempi di trasformazioni di contatto: trasformazione di dilatazione; trasformazione per polari reciproche.

Per una trasformazione di contatto agli ∞^2 punti del piano corrispondono ∞^2 curve del piano, e questa corrispondenza rappresenta una condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia una trasformazione di contatto.

Digitized by Google

§. 2. Varietà ∞^1 di elementi lineari nel piano (varietà M_1).

Sono di due specie: *a*) quelle formate di un punto fisso e da tutte le direzioni partenti da esso — *b*) quelle formate dagli infiniti punti di una curva, ognuno accompagnato della tangente in quel punto.

L'equazione pfaffiana $dy - p\,dx = 0$ è verificata da tali due varietà ∞^1 e solo da esse.

Se una equazione pfaffiana generale $A\,dy + B\,dy + C\,dp = 0$ è soddisfatta da tutte le varietà del tipo *a*) o del tipo *b*), essa è necessariamente della forma $dy - p\,dx = 0$.

Le trasformazioni di contatto mutano le M_1 nelle M_1 e ogni trasformazione che muta una M_1 in una M_1 è di contatto.

Proprietà delle varietà M_1: la distanza fra due loro elementi infinitamente vicini è un infinitesimo di ordine superiore.

§ 3. Per una trasformazione di contatto, a due curve tangenti possono corrispondere o due curve tangenti oppure una curva ed un punto su di essa.

La trasformata di una curva è l'inviluppo delle trasformate dei suoi punti.

§ 4. Sieno

$$x_1 = X\ (x, y, p)$$
$$y_1 = Y\ (x, y, p)$$
$$p_1 = P\ (x, y, p)$$

le formole che danno una trasformazione di contatto; le funzioni X, Y, P soddisfano alle relazioni $[XY] = 0$, $[PY] = P[PX]$ le quali rappresentano condizioni necessarie e sufficienti perchè queste funzioni possano rappresentare i secondi membri delle equazioni che danno una trasformazione di contatto.

§ 5. Legame tra le equazioni differenziali ordinarie di 1.° ordine e le trasformazioni di contatto.

Se si possono trovare due funzioni X e Y legate da $[XY] = 0$ e mediante cui possa esprimersi il primo membro dell'equazione differenziale, questa resta risoluta.

§ 6. Invariantività della speciale equazione pfaffiana

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

per una trasformazione puntuale ampliata a tre variabili.

Trasformazioni di contatto nello spazio.

Due specie di queste, cioè ad una e a due funzioni direttrici.

§ 7. Varietà ∞^2 di elementi dello spazio (varietà M_2).

In particolare varietà M_2 che sono di tre diversi tipi, cioè:

a) quelle costituite da tutti i punti di una superficie, ognuno accompagnato dalle direzioni dei rispettivi piani tangenti;

Digitized by Google

b) quelle costituite da tutti i punti di una curva, ognuno accompagnato dalle direzioni di ciascun piano passante per la tangente;

c) quelle costituite da un punto e da tutte le ∞^2 direzioni di piani per esso passanti.

La equazione pfaffiana $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ è soddisfatta da una qualunque M_2 e solo da esse.

La sola equazione pfaffiana cui soddisfanno tutte le M_2 è quella di sopra considerata.

Trasformazioni di contatto sono quelle e sole, che mutano una M_2 in una M_2.

§ 8. Per le trasformazioni di contatto, da un punto si può ottenere un punto, una linea od una superficie; da una superficie o linea si può ottenere similmente un punto, una linea od una superficie.

A due superficie tangenti corrispondono o due superficie tangenti, o una superficie ed un punto su di essa, o una superficie ed una linea su di essa, o una linea ed un punto su di essa.

L'inviluppo delle trasformate dei varî punti di una superficie è la trasformata della superficie stessa considerata come M_2.

§ 9. Esempi di trasformazioni di contatto nello spazio.

Trasformazione di Legendre.

Trasformazioni per pedali (superficie podarie).

Altra trasformazione di contatto con due funzioni direttrici che dà luogo ad una trasformazione considerata da Eulero ed Ampère.

La 1.ª e la 2.ª sono un caso particolare di un'altra generale, che si può costruire per n variabili, e sono ambedue involutorie.

§. 10. Se $x_1 = X(xyzpq)$, $y_2 = Y(xyzpq)$, $z_1 = Z(xyzpq)$, $p_1 = P(xyzpq)$, $q_1 = Q(xyzpq)$ sono le formole esplicite di una trasformazione di contatto nello spazio, le funzioni X, Y, Z, hanno la rimarchevole proprietà, che le equazioni

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = c,$$

qualunque siano le costanti a, b, c, rappresentano una M_2.

§ 11. Ricerca di tutte le trasformazioni di contatto le quali trasformano una superficie in un'altra in modo che le assintotiche dell'una si mutino in quelle dell'altra. Esse sono proiettività o correlazioni.

NOTIZIE

PER FAVORIRE LE RICERCHE SUL CALCOLO GEOMETRICO. — Il resoconto pubblicato nel Marzo 1901 dalla « International Association for promoting the Study of Quaternions and allied Systems » cf. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 111) fa noto che, malgrado alcune perdite pro-

Digitized by Google

dotte da morte, questo sodalizio annovera ancora 68 membri. Ne è attualmente presidente C. J. Joly, prof. di Astronomia nell'Università di Dublino. Oltre alla bibliografia dei quaternioni e teorie affine, già progettate (v. *Bollettino*, T. III, p. 94), venne fatto il piano di una inchiesta sulla posizione attualmente occupata da siffatte teorie nei programmi delle varie Università. Sarebbe poi desiderio della Società il fondare un giornale speciale, destinato ad accogliere i contributi tecnici o filosofici alle teorie che rampollano dalle opere di Hamilton e Grassmann.

* * *

Il metro proposto come unità di misura nel 1675. — Sotto questo titolo il Prof. A. Favaro presentò un'interessante memoria al Congresso storico tenuto a Parigi nel 1900, nella quale egli dimostrò essere Tito Livio Burattini il primo che immaginò il sistema uniforme di misure oggi in uso. È da deplorare che di questo fatto notevole non abbia potuto far menzione il Bigourdan nell'opera di cui rendemmo già conto (*Bollettino*, T. IV, 1901, p. 102).

* * *

Tema proposto dal R. Istituto Lombardo per l'anno 1903. — « La teoria dei gruppi di trasformazioni, fondata specialmente da Lie e sviluppata nell'ultimo quarto di secolo, si è mostrata feconda delle più svariate applicazioni alla geometria e all'analisi matematica. L'Istituto desidererebbe un lavoro nel quale si portasse un contributo od un perfezionamento notevole ed originale a questa importante teoria ». Premio L. 1200. I lavori dei concorrenti devono essere scritti in italiano, francese o latino e presentati anonimi non più tardi delle ore 15 del 31 Marzo 1903.

* * *

I premi dell'Istituto di Francia. — Nella solenne adunanza del 16 Dicembre 1901 vennero conferiti il Premio Francoeur a L. Laugel, il Premio Poncelet a E. Borel, il Premio Petit d'Ormoy a G. Koenigs, il Premio Lalande al Thome ed il Premio Valz a C. André.

Ricordiamo che pel corrente anno i temi posti a concorso dallo stesso sodalizio, sono:

Gran premio delle scienze matematiche. « Perfezionare in qualche punto importante, l'applicazione dei gruppi continui allo studio delle equazioni a derivate parziali ». Scadenza 1.° Ottobre 1902.

Premio Bordin. « Svolgere e perfezionare la teoria delle superficie applicabili al paraboloide di rivoluzione ». Premio 3000 Fr. Scadenza 1.° Ottobre 1903.

* * *

Errata-corrige alla nota a piè della pag. 75 del T. IV. Il Cesàro di cui è ivi parola è *Giuseppe*; ad *Ernesto* devesi poi la estesa memoria intitolata *Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazi*, che è pure sfuggita al Brückner.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

Digitized by Google

JUL 22 1902

ANNO V. APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7. 50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

R. BONOLA. *Bibliografia sui fondamenti della geometria.* Parte III.

Recensioni ed annunzi: *Bibliotheque du Congres international de philosophie*, III. [G. L.]. — G. VIVANTI. *Teoria delle funzioni analitiche* [C. Severini]. — H. KONEN. *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$ [G. L.]. — WIENER. *Die Einteilung der eb. Kurv. und Kegel III Ordn.* [G. L.]. — FRIZZO. *De numeris libri duo* [G. L.]. — VOLTERRA. *Sui tentativi di applic. delle matematiche alle scienze biologiche e sociali* [G. L.]. — BASSET. *Cubic and quartic Curves* [G. L.]. — NETTO. *Combinatorik* [G. L.]. — *Annuaire des mathématiciens* [G. L.]. — WARIGNY. *Tratado de Trigonometria* [G. L.]. — HAMMER. *Sechstellige Tafel* [G. L.] — BOHNERT. *Stereometrie* [G. L.]. — BAULE. *Vermessungskunde* [G. L.]. — FERRARIS. *Elektrotechnik*

Programmi e riassunti di corsi universitari: Univ. di Bologna. Corso di Matematiche superiori, 1900-1901 [C. Arzelà].

Notizie: Tema riproposto dal R. Istituto Veneto. — Pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. — Questione d'astronomia proposta dalla R. Accademia di Danimarca. — Nuovi documenti per la storia della geometria non euclidea. — Resoconti di congressi. — Concorsi di indole didattica. — Italiane dottoresse in matematica. — Progressi dell'« Esperanto ». — Tema proposto dalla Società olandese delle Scienze.

BIBLIOGRAFIA

Sui fondamenti della Geometria, in relazione alla Geometria Non-Euclidea

di ROBERTO BONOLA.

Parte III.

L'idea d'una pubblicazione bibliografica *sui fondamenti della geometria in relazione ecc.*, ci fu suggerita, or sono tre anni, dal chiarissimo prof. F. Enriques, allo scopo di utilizzare il materiale da noi raccolto in occasione di uno studio storico sui fondamenti della geometria.

Gli scarsi mezzi di cui allora disponevamo non ci permisero di offrire che una bibliografia assai incompleta; l'impossibilità di avere

Digitized by Google

dettagliate notizie su talune pubblicazioni, ci indusse in qualche inesattezza nella classificazione.

Avendo in seguito raccolto nuovi dati credemmo opportuno compilare aggiunte da riferirsi ai varî gruppi di lavori già registrati nella I.ª e II.ª parte, includendo anche le citazioni delle recenti pubblicazioni ed in generale di quanto ha attinenza alla geometria non-euclidea.

Con le presenti aggiunte non pretendiamo di aver esaurita la ricca bibliografia dell'argomento; pensiamo solo d'aver notevolmente ridotto il numero delle opere sfuggite ad una prima ricerca.

Le correzioni alle due prime parti e la tavola delle abbreviazioni, usate citando i periodici, troveranno posto in una IV.ª ed ultima parte, insieme al gruppo di lavori che danno uno svolgimento abbastanza completo dell'argomento che ci occupa.

Pavia, Gennaio 1902.

INDIRIZZO ELEMENTARE (aggiunte)

ALEXEJEWSKY, W. P. — *Sulla definizione di lunghezza in geometria non-euclidea* (in russo). (Charkow Ges., (2), VI, 1898; p. 139-153).

BARBARIN, P. — *Constructions sphériques à la règle et au compas* (Mathesis (2), IX, 1899; p. 81-85).

Id. — *Études de Géométrie non-euclidienne* (Mémoires couronnés, Belgique, LX; 1900; 167 p.)

Id. — *La Géométrie non-euclidienne* (Paris, Carré et Naud, 1901).

Id. — *Le cinquième livre de la Métagéométrie* (Mathesis, (3), I; 1901).

Id. — *Sur le paramètre de l'Univers* (Bordeaux Procès-Verbaux; 1901).

BOLYAI, J. — *The science absolute of space, indipendent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI (which never can be establisched a priori) followed by geometric quadrature of the circle in the case of the falsity of axiom XI* — Tradotto da G. B. Halsted con prefazione e appendice — (Tokyo sugaku-butsurigiku kwai kiji, V, 1892-94; p. 94-135).

Id. — *The science absolute of space, indipendent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI.* Translated from the original Latin by George Bruce Halsted. (G. B. Halsted, 2407 Guadalupe St., Austin, Texas, U. S. A. 1894).

BONNESEN, T. — *Bemaerkninger om en Hovedseatning i den elementaere Plangeometri* (Nyt Tidsskrift; VI, 1900; p. 25-32).

BURNSIDE, W. — *The construction of the Straight Line joining Two Given Points* (Proc. L. M. S.; XXIX, 1898; p. 125-132),

Digitized by Google

CASSANI, P. — *Sui fondamenti della Geometria - Considerazioni e proposte* (Atti del R. Istituto Veneto, X, 1898; p. 42-60).

COLLIGNON — *Note sur l'existence géométrique du rectangle* (Ass. Franc. pour l'adv. des sciences; II, 1899; p. 87-99).

CREVETES, Th. - *Essai sur le postulat d'Euclide* (Socecu, Bucarest 1895).

DAUGE, F. — *Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie riemannienne* (Mathesis; (2), VIII. 1898; p. 5-20).

Id. — *Sur la limite vers la quelle tend un certain triangle Lobatcheffskien* (Mathésis, (2), VIII, 1898; p. 267-273).

DE FRANCESCO, D. — *Sopra alcune formule di Geometria non-euclidea* (Giorn. Mat., XXXI, 1899; p. 98-106).

DEHN, M. — *Die Legendre 'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* (Math. Ann.; LII, 1900; p. 404-439).

GAUSS, C. F. — Recensione delle opere seguenti :

Commentatio in primum elementorum Euclidis *librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae demonstrantur. Auctore* J. C. Schwab, *Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali* - Stuttgart 1814. Typis F. Steinkopf.

Vollständige Theorie der Parallel-Linien. Nebst einem Anhange in welchem der erste Grundsats zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von Matthias Metternich, *Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt.* Mainz 1815 (Gött. gelehrte Anzeigen, 1316; p. 617-622; oppure: Gauss Werke, IV p. 364-368; VIII, p. 170-174).

Id. — Recensione dell'opera seguente:

Theorie der Parallelen, von Carl Reinhard Müller, *Doctor der Philosophie, ausserordentlichem Professor der Mathematik — Marburg, 1822* (Gött. gelehrte Anzeigen 1822, p. 172-173: oppure: Gauss Werke, IV, p. 368-370; VIII, p. 183-185).

Id. — *Corrispondenza di Gauss con Bolyai, Schumacher, Gerling, Wachter, Olbers, Taurinus, Bessel, Lobatscheffsky, Sartorius von Waltershausen* — ed altri scritti di Gauss (1799-1846) (Gauss Werke; VIII, Grundlagen der Geometrie; p. 159-268).

GIUDICE, F. — *Sulla metrica degli spazi a curvatura costante* (Torino, attî, XXXV; 1899-1900 p. 119-144).

EFIMOV, M. — *Les séries dans la pangéométrie* (Nouv. Ann., (3), XVIII, 1899; p. 28-31).

ENGEL, F. — *Construction d'une parallèle dans la géométrie de Lobatcheffsky* (Kasan, Boll., (2), VII, 1897; p. 118-121).

Id. — *Zur nichteuklidischen Geometrie* (Leipz. Ber., L, 1898; p.181-191).

Digitized by Google

HAUSDORFF, F. — *Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig Ber., LI, 1899; p. 161-214).

HILBERT, D. — *Grundlagen der Geometrie* — quest'opera è contenuta nella « Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals herausgegeben von dem Fest-Comitee » (Leipzig, Teubner 1899).

Id. — *Les principes fondamentaux de la géométrie* (Traduzione di Laugel dell'opera precedente, colle aggiunte di Hilbert (Ann. École Norm. (3), XVII, 1900; p. 103-209).

HÖLDER — *Anschauung und Denken in der Geometrie* (Leipzig, 1900).

JANSSEN VAN RAAIJ — *Sur une formule de la géométrie non-euclidienne* (Nieuw Arch. voor Wiskunde, reeks 2, deel 3, stuk 1; 1896; p. 77-79).

KAGAN, H. (*) — *Démostration nouvelle des équations fondamentales de la géometrie de l'espace de corbure constante négative* (Nouv. Ann., (3), XIV, 1865; p. 20-30).

Id. — *Note sur une formule bien connue de la géométrie imaginaire* (Nouv. Ann., (3), XIV, 1895; p. 251-258).

KAHAN, H. — *Schizzo del sistema geometrico di Lobatscheffsky* (in russo) (Spaczinski's Bote, N.° 269, p. 120-126; N.° 270, p. 150-153; 1898).

LOBATSCHEFFSKIJ, N. — *Geometrical researches on the theory of parallels.* Tradotto da G. B. Halsted con prefazione ed appendice. (Tokyo sugaku-butsurigiku kawai kiji, V, 1892-94; p. 6-50).

Id. — *The non-euclidean Geometry. Geometrical researches on the theory of parallels* (Austin, Texas, U. S. A. 1894).

Id. — *Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles.* Traduction du russe par M. F. Mallieux - Première partie; (Liège, Mem, (3), II, 1899; 101 p.).

Id. — *New principles of Geometry, with a complete theory of parallels.* Tradotto dal russo da G. B. Halsted (Austin, Texas, 1897.)

Id. — *The introduction to Lobachevski's new elements of geometry,* Traduzione di G. B. Halsted (Texas Academy, 1897).

Id. — *Zwei geometrische Abhandlungen* (Vedi Engel: Urkunden zur Geschichte der Nicht-euklidischen Geometrie — scritti storici).

MACAULAY, F. S. — *John Bolyai's science absolute of space.* (The Mathematical Gazette, 1896-97; p. 25-31; p. 50-60).

MANNING, H. P. — *Non-Euclidean Geometry* (Boston, U. S. A.; Ginn & Company, 1901).

(*) Questa pubblicazione fu registrata erroneamente nell'Indirizzo-metrico differenziale. — Cfr. *Boll.* II, pag. 36.

Digitized by Google

MANSION, P. — *Principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de Riemann* (Report of the Brithish Ass., Oxford, 1894).

Id. — *Teoría sucinta de las funciones hiperbolicas* (Arch. de Matematicas puras y. Aplicadas, I, 1896 p. 29-34; 46-50; 65-71; 86-88; 106-108; 125-127; 150-153; 170-172; 191-192; 211-213).

Id. — *Pour la géometrie non-euclidienne* (Mathésis, (2), VII; 1897; p. 33-43).

Id. — *Note de géométrie non-euclidienne* (Mathésis, (2), VII; 1897; p. 158-161).

Id. — *Premièrs principes de la métagéometrie ou géométrie générale.* Traduzione polacca di Dickstein (Wiadomosci matematyczne, I, 1897; p. 1-23; 68-91).

Id. — *Sur l'expression analytique du volume d'un corps en géométrie non-euclidienne* (Brux. S. sc., XXI; 1896-97; p. 118-119: oppure: Mathesis, Supp. VII, 1897; 2 p.).

Id. — *Mélanges de géométrie euclidienne et non-euclidienne* (Senza indicazione; 1898).

Id. — *Quelques propriétés d'un espace (analytique) Lobatcheffskien à cinq dimensions* (Brux. S. sc. XXIII, 1898-99; p. 5).

Id. — *Équation des horicycles et des horisphères en géométrie Lobatcheffskienne* (Brux. S. sc., XXIII, 1898-99; p. 32-33).

NEKRASSOW, P. A. — *Metodi algebrici per le soluzioni dei problemi geometrici* (in russo) (Mosca 1896).

PIETZKER, F. — *Ueber die absolute Geometrie* (Zeit. für Math, XXIII 1892, p. 81-106).

REYES Y PRÒSPER — *Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide* (Mathesis; (2), VII; 1897, p. 86).

Id. — *Note sur le théorème de Pytagore et la géométrie non-euclidienne* (Kasan Boll.; (2), VII; 1897; p. 67-68).

Id. — *Nota sobre un punto de geometria non euclidea* (Archvo de Mat. puras y aplicadas; II, 1898, p. 44-47).

SCHMITZ, A. — *Aus dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie* (Neuburg a D. 1884).

SIKSTEL, V. — *Teoremi fondamentali della geometria sferica* (in russo) (Kasan Boll. (2), II; (2), IV; 1894; p. 18-41).

Id. — *Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique* (Archiv. d. Math. u. Phy., (2), XV; 1896, p. 159-171 - (2), XVII, 1900; p. 337-353).

SOMMER — *Hilbert's foundations of Geometry* (American M. S. Bull.; VI; 1900).

SIMON, M. — *Zu den Grundlagen der nicht-Euklidischen Geometrie* (Strassburg, 1891).

Digitized by Google

SIMON, M. — *Zwei Sätze zur nicht-Euclidischen Geometrie* (Math. Ann. XLVIII, 1896; p. 607).

Id. — *Die Geometrie der Zwischenebene und der Grenzfläche* (Deut. Math Ver. VII, 1899; p. 67-76).

TILLY (DE) J. — *Simple remarque sur le triangle* (Mathésis; (2), VIII, 1898: p. 217-218).

Id. — *Demonstration générale du seconde théorème de Legendre* (Mathésis; (2), IX, 1899; p. 5-9).

Id. — *Sur la somme des angles dans un triangle* (Mathésis; (2), IX, 1899; p. 265-266).

TARRY, G. — *Géométrie générale. Le cercle et la trigonometrie* (Ass. Franc., II, 1891; p. 90-118).

Id. — *Géométrie générale. Mesure des arcs, des courbes, etc.* (Ass. Franc., II, 1892; p. 217-236).

Id. — *Géométrie générale. Les droits et les plans* (Ass. Franc., II, 1894; p. 184-195).

TIRELLI, F. — *Osservazioni sulla retta e sul piano* (Napoli, 1879; 22 p.).

VELTMANN, W. — *Geometrische Sätze ueber die Fläche und die Winkelsumme des Dreiecks und des Vierecks* (Archv. der Math. und Phy., (2), XVII, 1900; p. 442-448).

VILLAREAL, F. *Geometria imaginarias no-Euclidianas* (Congreso Cientifico en Buenos Ayres - Trabajos de la 1.ª seccion - 1898; p. 72-121).

INDIRIZZO METRICO-DIFFERENZIALE (aggiunte).

BANAL, R. — *Sulle varietà a 3 dimensioni con una curvatura nulla e due uguali* (Ann. Mat., (2), XXIV, 1896; p. 213-240).

Id. — *Sugli spazî a curvatura costante* (Lincei, Rendiconti (5), VII, 1898; p. 7-15).

BIANCHI, L. — *Sulla applicabilità di due spazî con la medesima curvatura costante* (Lincei, Rendiconti (5), VII, 1898; p. 147-155.

Id. — *Sopra le superficie a curvatura costante* (Lincei, Rendiconti, (5), VIII, 1899; p. 141-151).

Id. — *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Ann. Mat., (3), III, 1899; p. 185-299).

Id. — *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Leipzig — Teubner, 1899).

Id. — *Sulla integrazione della equazione* $\Delta_2 u = o$ *nello spazio indefinito non euclideo* (Lincei, Rendiconti, (5), IX, 1900; p. 333-343).

Id. — *Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante* (Ann. Mat., (3), IV; 1900; p. 1-66).

Id. — *Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazii di curvatura costante* (Ann. Mat. (3), V, 1901; p. 165-219).

Digitized by Google

BELTRAMI, E. — *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* — Tradotto in russo da P. Mey (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

Id. — *Sugli spazi di curvatura costante* — Tradotto in russo da P. Mey (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1983).

BERZOLARI, L. — *Un' osservazione sull' estensione dei teoremi d' Eulero e Meusnier agli iperspazii* (Lincei, Rendiconti, (5), VI, 1897; p. 283-290).

Id. — *Ancora sull' estensione dei teoremi d' Eulero e Meusnier agli iperspazii* (Lincei, Rendiconti, (5), VII, 1898; p. 4-6).

Id. — *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque* (Torino — Atti, XXXIII, 1897-98; p. 692-700; p. 759-778).

COTTON, E. — *Sur les variétés à trois dimensions* (Toulose, Ann. (2); I, 1899; p. 385-438; - Paris, Gauthier-Villars, 61 p., 1899).

DARBOUX, G. — *Leçons sur la theorie générale des surfaces — Livre VII — Chap. XIV* (Paris — Gauthier Villars — 1887-1896).

GUICHARD. — *Sur les surfaces minima non euclidiennes* (Ann. Écol. Norm.; (3), XIII, 1896; p. 401-414).

HADAMARD J. — *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions* (Boll. Sc. Math. XXV, 1901; p. 37-40).

HILBERT, D. — *Ueber Flächen von constanter Gauss'scher Krümmung* (Transactions of the American Math. Society, II, 1901; p. 86-99).

KOMMERELL, K. — *Die nichteuklidische Geometrie und die Trigonometrie auf den Flächen von kostantem Krümmungsmass* (Math. Nat. Mitteilungen, Württemberg, (2), III, 1901; p. 18-31).

RAZZABONI, A. — *Le formule del Frenet in geometria iperbolica e le loro principali applicazioni* (Bologna, 1889; 22 p.).

RIEMANN, B. — *Sulle ipotesi che servono di base alla geometria* — Tradotto dal tedesco in russo da D. Sintsoff (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

Id. — *On the hypotheses wich lie at the bases of geometry* — Tradotto in tedesco da Halsted (Tokyo sugaku-butsurigiku kwai kiji, VII, 1805-96; p. 65-78).

STÄCKEL, P. — *Ueber Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten* (Crelle, C XIII, 1894; p. 102-115).

INDIRIZZO GRUPPALE (aggiunte)

HELMHOLTZ, H. — *Sui fatti che servono di base alla geometria.* Tradotto in russo dal tedesco da Vassilief (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

KLEIN, F. — *A comparative review of recent researches in geometry* - Traduzione dal tedesco - (Bull. of the New York Society, II, 1892-93; p. 215-249).

Digitized by Google

KLEIN, F. — *Considerazioni comparative sulle ricerche geometriche moderne* - Tradotto dal tedesco in russo da D. M. Sintsoff - (Kasan Boll., (2), V, 1895-96; p. 16; (2), VI, 1696, p. 28).

LIE, S. — *Osservazioni sulla memoria di Helmholtz* - Tradotto in russo dal tedesco da Sintsoff (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

RICCI, G. — *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni* (Memorie Soc. XL, (3), XII; 1899 p. 69-92).

Id. — *Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque* (C. R. 1898).

Id. — *Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions* (C. R. 1898 p. 344-346).

STUDY, E. — *Ueber Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie* (Leipzig. Berich., 1896; p. 649-664).

DISTANZA FINITA (aggiunte)

HILBERT, D. — *Sur la ligne droite regardée comme étant le plus court chemin d'un point à un autre* - Tradotto dal tedesco - (Enseignements Math.; III; 1901; p. 194-200).

MANSION, P. — *Relation entre les distances de cinq ou six points en géométrie non-euclidienne* (Mathesis, supplément; VII; 1897; 7 p).

INDIRIZZO PROIETTIVO (aggiunte)

BARBARIN, P. — *Géométrie générale des espaces* (Ass. Française pour l'adv. des sciences, II, 1898; p. 111-132).

BLASER, L. — *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie* (Math. Ann., LV, 1901; p. 293-300).

BONOLA, R. — *Sulla introduzione degli elementi improprii in geometria proiettiva* (Giorn. Mat. XXXVIII, 1900; p. 105-116).

Id. — *Determinazione per via geometrica dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico, ellittico.* (Rendi. Circolo Palermo, XV, 1901, p. 56-65).

HAUSDORFF, F. — *Analitische Beiträge zur nicht-euklidischen Geometrie* (Vedi indirizzo elementare, aggiunte).

KLEIN, F. — *Sur la géométrie dite non-euclidienne.* Traduzione francese della memoria dei Math. Ann. IV. (Toulouse, Mém. Acad. VIII, 1896; p. 573-625).

LINDEMANN, F. — *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kräftesysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Math. Ann.; VII; 1874; p. 56-143).

LE VAVASSEUR, R. — *Les systèmes de sphères et l'espace non-euclidien à quatre dimentions* (Toulouse, Bull. Acad. II, 1899; p. 71-87).

Digitized by Google

MACAULAY, F. S. — *Cayley's theory of the absolute* (The Math. Gazzette, 1898; p. 155-158).

OVIDIO (d') E. — *Nota sulle proiezioni ortogonali nella geometria metrico-proiettiva* (Giornale Mat. XIV; 1876; p. 298-305).

PETERSEN, J. — *Géométrie des droites dans l'espace non-euclidien.* (Danemark, Bull. Acad. Royale, 1900; p. 305-330).

RICORDI, E. — *I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva* (Viterbo, Agnesotti, 1882; p. 1-68).

Id. — *I circoli nella geometria non-euclidea* (Giornale di Math. XVIII; 1880; p. 255-270).

Id. — *Una generalizzazione del problema dei nove punti di Feuerbach nella geometria non-euclidea* (Reggio Calabria 1886; 17 p.).

SCHLESCINGER, L. — *Ueber projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen* (Crelle, CXXI; p. 168-176).

SCOTT C. A. — *On Cayley's theory of the absolute* (American M. S. Bull., (2), III, 1897; p. 235-246).

SCHUR, F. — *Lehrbuch der analytischen Geometrie* (Leipzig, 1898).

Id. — *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Math. Ann., LV, 1901 p. 265-292).

STEPHANOS, M. — *Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonometrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires.* (Bull. S. M. F., X; 1881-82; p. 134-137).

STRINGHAM, I. — *A proof of the Directro-Focal Property of the Plane Section of a Cone in non-Euclidean Space* (Proc. L. M. S. XXXII, 1900; p. 308-311).

STUDY, E. — *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie* (Leipzig Berichte; 53; 1901; p. 338-403)

WOOLSEY, J. W. — *A case of non-euclidean geometry* (Bull. New-York, Society, II; 1892-93; p. 158-161). *(Continua).*

RECENSIONI ED ANNUNZI

Bibliothèque du Congrès international de Philosophie. III. *Logique et Histoire des Sciences.* Paris, A. Colin, 1901, 8.°, pag. 688 [Prezzo 25 fr.].

È questo il III dei quattro volumi in cui vennero adunate le comunicazioni fatte al Congresso internazionale di filosofia, del quale per ben due volte (v. *Bollettino* T. III, 1900, p. 99 e T. IV, 1901, p. 32) tenemmo parola; è un grosso volume, di mole doppia dei suoi fratelli, e che va raccomandato a coloro che s' interessano ai progressi

Digitized by Google

delle scienze fisiche e matematiche; tutti gli articoli si trovano accuratamente tradotti in francese, il che toglie al libro che annunciamo quell' aspetto di *rigatino,* tanto disapprovato da Giosuè Carducci.

Dei ventiquattro scritti pubblicati, quattro sono di indole essenzialmente storica, mentre gli altri concernono la filosofia e la logica.

Di quelli, due — dovuti a M. Cantor e G. Milhaud — si riferiscono alle origini del calcolo infinitesimale, il terzo è di S. Günther e concerne le origini della legge di gravitazione, il quarto e di H. Bouasse e tratta dei principii della termodinamica.

Degli altri venti scritti, i primi due rappresentano l' indirizzo *inglese* agli studii di logica matematica; eccone i titoli: Mac Coll, *La logique symbolique et ses applications;* Johnson, *Sur la théorie des équations logiques.* Segue la *Théorie des équations logiques à trois termes a, b, c* del Poretskii, e quindi due, rappresentanti l' *indirizzo tedesco*; sono quello dello Schröder *Sur une extension de l'idée de l'ordre* e quello del Russell concernente *L'idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et le temps.* I quattro articoli che vengono poi rappresentano degnamente l'*indirizzo italiano* degli studii di logica matematica; eccone gli autori e i soggetti: Peano, *Les définitions mathématiques;* Burali-Forti, *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel;* Padoa, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie déductive quelconque;* Pieri, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique.* L' Italia è inoltre rappresentata dal Professore Vailati, che ha fatto al Congresso una interessante lettura *Des difficultés qui s'opposent à une classification rationelle des sciences.*

Due speciali teorie geometriche sono trattate dal Macfarlane (*Les idées et principes du Calcul géométrique*) e da G. Lechalas *(De la comparabilité des diversas espaces);* i principii della meccanica da R. Blondlot e H. Poincaré, e quelli della termodinamica da U. Le Vernier; alla chimica teorica, esatta, quasi matematica sono dedicati due scritti del Kozlowski e del Wald. Altri due articoli possono passare sotto silenzio, essendo i loro temi estranei al piano del *Bollettino* nostro. Invece una breve *Note sur l'induction et la généralisation en Mathématiques* dell' Hadamard, a parere nostro, merita tanto l' attenzione dei nostri lettori, che crediamo prezzo dell' opera riferirne qui una traduzione fedele.

« Da molto tempo si è fatta notare la somiglianza esistente tra i cammini che segue lo spirito umano, nella ricerca delle verità scientifiche, quando si tratti di questioni matematiche e nel caso di questioni sperimentali.

Infatti, se la dimostrazione delle leggi matematiche procede per

Digitized by Google

deduzione, è notorio che succede spessissimo l'opposto riguardo alla ricerca di queste stesse leggi. In una immensità di circostanze, gli è mediante l'induzione, mediante un'ipotetica generalizzazione di risultati consegniti in casi speciali, che si scopre la via da seguire ed i risultati che si dovrà poi sforzarsi di dimostrare.

Che tali generalizzazioni possano *a priori* essere ingannevoli, gli è ciò che è appena necessario dire. Ma (ed è appunto questo il fatto logico su cui mi permetto di attirare l'attenzione) tale osservazione, enunciata così, è incompleta. Non soltanto siffatte generalizzazioni possono trarre in inganno, cioè non vi è ragione perchè non lo siano, ma *vi sono spesso delle ragioni perchè lo siano.* Gli è ciò che a più riprese si è manifestato nel corso delle ricerche intraprese in questi ultimi anni.

Le generalizzazioni a cui alludiamo hanno, infatti, per intento di passare dallo studio di problemi già risolti a quello di problemi che ancora non poterono esserlo. Ora nella via seguita dalla scienza (almeno della scienza matematica), nella rapidità più o meno grande con cui le questioni che essa propose si sono chiarite, si può dire che il caso non ha parte alcuna. Se una certa questione potè venire trattata ed un'altra non, o se una questione potè venire risolta in un caso speciale ma non in generale, gli è che il caso particolare differisce dal caso generale per caratteristiche essenziali, per caratteristiche le quali, per semplificarlo, toccano l'essenza delle cose. In tal caso vi è la massima probabilità che una determinata circostanza, incontrata nello studio del caso risolto, non si sia presentata che per effetto di quelle speciali caratteristiche.

Un esempio ben chiaro è offerto dalle equazioni differenziali. Poincaré ha studiato il modo con cui sono disposte le traiettorie per le equazioni del I ordine e I grado; tale disposizione è totalmente differente da quella che presentavasi nei casi che si erano saputi trattare anteriormente. In generale, ogni traiettoria si avvolge infinite volte attorno ad una certa linea chiusa (detta *ciclo limite*): ora questo fatto non s'incontrava nelle equazioni differenziali del I ordine che si erano integrate.

Una tale differenza non recherà stupore se si pensa che le equazioni integrabili devono questa prerogativa all'esistenza di un integrale noto, che è di necessità o una funzione uniforme, ovvero una funzione i cui varî valori si permutano secondo leggi relativamente semplici. Gli è appunto a questa specialissima condizione che è dovuta la disposizione eccezionale presentata allora dalle traiettorie. Grazie ad essa, lo studio dei casi particolari dà del caso generale una idea falsa quanto sarebbe quella che si formebbe dell'ellisse chi studiasse un ellisse infinitamente schiacciata in un segmento rettilineo.

Digitized by Google

In altre ricerche, relative alle equazioni differenziali del 2.° ordine, le cose succedono in modo del tutto simile. Lo stesso dicasi per certe questioni della teoria delle funzioni, quali sarebbero lo studio del contegno di una funzione rappresentata da una serie di Maclaurin, sul cerchio di convergenza delle serie.

In una parola, al principio secondo cui « questioni analoghe devono ammettere soluzioni analoghe », gli esempi a cui facemmo allusione conducono ad opporre il seguente: *Dati due problemi analoghi, ma di cui uno solo potè essere trattato, vi è ragione per ritenere che i risultati ottenuti nella soluzione dell' uno siano differentissimi da quelli che si devono ottenere risolvendo l' altro.*

È chiaro che questo principio non obbliga a rinunciare ai servigi che ancora può rendere l'induzione matematica, soltanto ne limita la portata.

Non spetta a me l' indagare se lo stesso principio interviene applicando l' induzione alle scienze sperimentali. È evidente che per esse, le cose non succedono proprio nello stesso modo, essendo il caso un padrone assai più potente per lo sperimentatore che pel matematico, e la possibilità o la impossibilità di risolvere una determinata questione dipende, nel massimo numero di casi, da circostanze accessorie. Tuttavia bisogna osservare che le cose possano mutare di mano in mano che la scienza progredisce. Gli è ciò che viene dimostrato dagli esempi che abbiamo citati e dei quali il numero e l' importanza crebbero indubbiamente in questi ultimi anni ».

In aggiunta ed a ulteriore conferma di questa bella osservazione ci sia lecito notare come essa sia balenata quasi tre secoli prima dinnanzi alla mente onniveggente di Fermat. Infatti nell' esordio della meravigliosa Dissertazione avente per scopo il *Paragone delle curve con le rette* il sommo matematico osserva:

« Per quanto mi consta, non venne finora dimostrata da alcun geometra la eguglianza fra una retta assegnata ed una curva puramente geometrica.

Quello infatti che un sottile geometra inglese ha recentemente scoperto e dimostrato, che cioè *la cicloide ordinaria è eguale al quadruplo del diametro del cerchio generatore*, sembra avere, secondo il parere dei geometri più dotti, una portata limitata.

Essi ritengono infatti essere una legge ed un ordine naturale che sia impossibile trovare una retta eguale ad una curva, a meno che non si supponga già un' altra retta eguale ad un' altra curva (1); e, prendendo come esempio la cicloide, provano che ciò accade in questo caso. Non lo nego; infatti è evidente che il tracciamento del cicloide

(1) Questa legge venne enunciata da R. de Sluse; cfr. una lettera di Pascal a Huggens (*Oeuvres de Pascal*, La Haye, 1779, T. V, pag. 413).

Digitized by Google

presuppone l' eguaglianza di un' altra curva e di una retta, cioè quello del cerchio generatore della cicloide con la retta base della cicloide. Ma da ciò che segue si vedrà che cosa si può dire della legge di Natura da essi stabilita e quanto sia pericoloso stabilire un assioma sopra uno o due fatti sperimentali *(et quam pericolosum ab uno aut ultero experimento statiem ad assioma properare)* ».

L' esempio offerto da Fermat a sostegno di questa osservazione è, notoriamente, la parabola semicubica, curva da cui egli insegnò poi a dedurre in vari modi innumerevoli altre curve tutte rettificabili.

Osserviamo, finendo, che a conforto della tesi sostenuta da Fermat e dall' Hadamard sta anche la proposizione recentemente stabilita dal Pringsheien: *Se una serie di potenze è affatto generale, tutti i punti della circonferenza di convergenza sono singolari e quindi la funzione di cui quella serie è un elemento non è continuabile (nel senso di Weierstrass) oltre questa circonferenza;* è questo un fatto che non poteva ottenersi per generalizzazione, tutte le funzioni note essendo rappresentate da serie speciali, ammettenti continuazione.

G. L.

G. Vivanti: *Teoria delle funzioni analitiche.* Manuali Hoepli 1901. (Prezzo L. 3).

Nella teoria delle funzioni analitiche all' indirizzo di Cauchy e Riemann si contrappone, come è noto, quello di Weierstrass, basato su concetti aritmerici, che permette di svolgere la teoria senza il sussidio del Calcolo infinitesimale, e fa della medesima una continuazione immediata dell' Algebra: il metodo di Cauchy e Riemann ha su quello di Weierstrass il vantaggio di una maggiore speditezza e concisione ed anche di una maggiore eleganza; quest' ultimo riesce dal punto di vista logico più rigoroso.

Ispirandosi alle idee di Weierstrass il Chiarissimo Prof. Vivanti ha esposto diffusamente nel Manuale dianzi citato, tutta quella parte della teoria, che è divenuta oramai classica.

L' uniformità prestabilita di metodo è sempre rigorosamente osservata, e questa uniformità costituisce la caratteristica principale del libro, che lo differenzia dalle altre pubblicazioni congeneri, nelle quali predomina un indirizzo eclettico. L'A. supera inoltre felicemente tutte le difficoltà che si frappongono al conseguimento del suo fine, dando anzi prova di molta destrezza tutte le volte che si presenta il bisogno di ridurre un qualche procedimento a forma elementare; e dell' uso di un unico mezzo si avvantaggia non poco l' euritmia dell' esposizione.

Meritano in modo speciale, nell' ordine d' idee ora espresse, di essere segnalate le ricerche, già inserite nei Rendiconti del Circolo

Digitized by Google

Matematico di Palermo (1), *Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche.*

Come studi assai geniali ed importanti, non ostante il numero limitato dei risultati ottenuti, notiamo poi quelli *sulle serie di potenze, i cui coefficenti dipendono da una variabile.*

Concludendo, l'idea, che a noi pare assai buona, di una esposizione, basata sul solo metodo elementare di Weierstrass, di tutta la *teoria generale* delle funzioni analitiche, è dall'A. tradotta in atto molto abilmente, e l'esposizione stessa unisce al pregio della chiarezza e del rigore quello della brevità.

Non meno accurata e ricca di particolari è la prima parte del libro, che precede quella via descritta, e contiene le nozioni principali della teoria degli aggregati, nozioni che costituiscono un sussidio indispensabile dell'analisi, e nello studio stesso di cui è parola hanno capitale importanza.

Sarebbe stato qui opportuno, che l'A. si fosse più ampiamente giovato delle ricerche ultime di Cantor, e in ogni modo che avesse sempre aggiunto i concetti di addizione e moltiplicazione delle potenze degli aggregati (altrimenti detti *numeri cardinali transfiniti*) e stabilito le formole ad esse operazioni relative, giacchè quei concetti e quelle formole sono di grande utilità e possono dar luogo a numerose applicazioni, come Cantor stesso osserva (2). Con ciò non intendiamo del resto diminuire l'importanza di questa parte, che, nei limiti fissati dall'A. e per lo scopo da esso voluto, riesce del pari utile ed efficace.

Una terza parte s'aggiunge alle due dianzi considerate, contenente quei nuovi capitoli della teoria, che sono tutt'ora in via di formazione.

Gli argomenti vi sono esposti quali per disteso, quali in succinto, e ciò perchè i risultati di alcuni autori vengono stabiliti con dimostrazioni fondate su basi estranee alla teoria di Weierstrass, ed altri sono stati soltanto enunciati, o devono essere maggiormente chiariti.

Nondimeno chi legge può formarsi un'idea chiara e precisa delle questioni, a cui mirano queste nuove ricerche, e del punto a cui esse sono giunte; e lo scopo dell'A., che è quello principalmente di *mettere in luce il molto che ancora rimane a farsi, di mostrare quali nuovi e fecondi campi siano aperti all'ingegno ed all'attività dei giovani analisti*, è pertanto raggiunto; anzi devesi dire, che il libro riesce un'ottima guida nello studio di questo ramo importantissimo dell'analisi, tanto più che esso offre via via il vantaggio

(1) T. XIII (1899).

(2) *Beiträge zur Begrundung der transfinitten Mengenlehre* I. (Math. Annalen T. 46, 1895).

Digitized by Google

di una grande ricchezza di citazioni ed in fine quello di una lista bibliografica.

Non è peraltro da disconoscere che forse più opportuno, certo più utile, sarebbe stato rinunciare in quest'ultima parte alla detta uniformità di metodo, allo scopo di dare di alcuni punti un'esposizione meno sommaria: il libro avrebbe inoltre contenuto esso stesso i mezzi necessari per completare, mediante la lettura dei lavori originali, le cognizioni in esso acquistate, e si sarebbe anche arricchito di utili confronti fra i due metodi, che, non ostante la diversità del punto di partenza, vengono in fondo a coincidere.

L'A. ha, come dicevamo, inteso rivolgersi ai giovani analisti; noi termineremo aggiungendo che *principalmente* nella biblioteca di ognuno di essi non dovrebbe mancare questo Manuale.

C. SEVERINI.

H. KONEN. *Geschichte der Gleichung* $t^2 - D u^2 = 1$. Mit 2 Figuren im Text. Leipzig, Hirzel, 1901, 8.°, p. 132.

L'equazione indeterminata, la cui storia è narrata nell'opuscolo che annunziamo, reca di consueto il nome del geometra inglese Pell; perchè mai l'autore si è scostato dalla consuetudine invalsa? La ragione sta che la prima radice di tal costume risiede in un errore di cui sembra principalmente responsabile Eulero, il quale al Pell attribuì un procedimento di soluzione di essa, dovuto invece a Lord Brouncker e pubblicato da Wallis, e in parte anche a Dirichlet, il quale, probabilmente traviato da Eulero, fece vagamente allusione a ricerche del Pell su quell'equazione (1). Invece questa appare, almeno in qualche caso speciale, sin dall'epoca greca; basta infatti ricordare, come fa l'A., l'equazione $t^2 - 2u^2 = \pm 1$, così strettamente legata alla teoria platoniana dei *numeri diagonali e diametrali*, e l'equazione $t^2 - 4729494\, u^2 = 1$, che s'incontra tentando risolvere il celebre *problema dei buoi* attribuito ad Archimede; si può aggiungere che in Diofanto (VI: 12, 14, 15) si trovano alcune condizioni di risolubilità dell'equazione generale. Sotto tale forma essa trovasi poi nei matematici arabi, i quali lo risolsero con un metodo così geniale che l'Hankel non esitò a dirlo la cosa più sottile che sia stata fatta nella teoria dei numeri, prima di Lagrange.

Ma in Occidente chi per primo studiò a fondo l'equazione $t^2 - D u^2 = 1$ è Fermat, il cui nome — seguendo la ragionevole proposta del D.r Konen — dovrebbe essere ad essa collegato; egli contribuì alla so-

(1) La questione storica dell'origine del nome *equazione di Pell* non è ancora pienamente chiarita; si vegga a tale proposito un articolo del Wertheim in *Bibl. math.*, 3.ª Serie, Vol. III, 1902, p. 113-126.

Digitized by Google

luzione di essa, non solo direttamente, ma anche col farne soggetto di una sfida che suscitò in Francia ed Inghilterra vivo interesse e lotte feconde, nelle quali s'illustrarono Frenicle, Lord Brouckner e Wallis. Dopo di essi, per uno di quei fenomeni di sosta tanto comuni nella storia del pensiero umano, la questione rimase quasi per cent'anni dimenticata o trascurata, finchè cioè Eulero nuovamente la incontrò nelle sue ricerche sopra l'analisi indeterminata di 2.° grado. Per quanto notevoli siano i risultati a cui egli pervenne, essi impallidiscono di fronte alle soluzioni realmente definitive che di quella equazione diede Lagrange e che il Legendre tanto contribuì a far conoscere con la sua *Théorie des nombres*.

Una luce nuova ed inattesa venne projettata sulla stessa questione da Gauss, al cui impulso devonsi posteriori importanti ricerche di Jacobi, di Dirichlet e di altri minori.

Altri nuovi orizzonti vennero aperti dal Kronecker, ma il nostro autore rinuncia ad esporne i fondamenti e le conseguenze; è da augurarsi che egli, ritornando sopra tale deliberazione, completi l'opera utilissima da lui intrapresa, per compiere la quale egli sembra avere una preparazione più che sufficiente. G. L.

H. Wiener. *Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen.* Mit zwei Figuren. Halle a. S., M. Schilling., 8.° gr., p. VI + 34. [Mk. 1.60].

Ormai due secoli e mezzo trascorsero dal giorno in cui Newton insegnò a classificare le curve del 3.° ordine; a partire dalla pubblicazione della sua celebre *Enumeratio linearum tertii ordinis*, innumerevoli sono i lavori che vennero scritti sopra il medesimo tema, alcuni aventi il modesto intento di dimostrare le asserzioni del sommo inglese, ma altri contenenti nuovi criterî di classificazione: basti ricordare i nomi di Stirling ed Eulero, di Chasles e Möbius, di Plücker e Cayley per dimostrare in quali alte sfere del pensiero quell'argomento abbia destato vivo e continuato interesse. Era quindi presumibile che la questione di classificare le cubiche piane fosse ormai esaurita. Lo scritto che annunciamo dimostra errata tale supposizione e conferma non esistere campo per quanto coltivato, il quale sia incapace di compensare con qualche frutto il coltivatore sapiente ed operoso.

Il lavoro del Wiener appartiene alla categoria di quelli puramente sintetici; i metodi dello Staudt sono ivi costantemente ed abilmente sfruttati; così, non soltanto è ivi esposta una completa rappresentazione reale dei nove flessi di una cubica generale, ma è eziandio dimostrata l'opportunità di distribuire le curve in questione nelle categorie seguenti:

Digitized by Google

Curve di Genere 0.

1. S. Curva con cuspide.
2. D. Curva con punto doppio.
3. D'. Curva con punto isolato.

Curve di Genere 1.

Δ Triangolo con un solo lato reale.
4. I. Forma intermedia tra Δ e H_1.
5. H_1. Curva armonica con due rami.
6. I_1. Forma intermedia tra H_1 e Δ^1.

Δ^1 Triangolo con tre lati reali.
7. II. Forma intermedia tra Δ^1 e A.
8. A. Curva equianarmonica (curva limite di Möbius).
9. III. Forma intermedia tra Δ e H_2.
10. H_2. Curva armonica con un solo ramo.
14. III^1. Forma intermedia tra H_2 e A^1.
12. A^1. Curva equianarmonica (figura omografica della curva limite di Möbius).
13. II^1. Curva intermedia tra A^1 e Δ.

Δ Triangolo con un solo lato reale.

Il lavoro del Wiener può servire di modello per chi in avvenire vorrà applicare alle *questioni di forma* i metodi puramente geometrici inventati da Staudt. Esso è pertanto ben più di una semplice illustrazione di una serie di modelli geometrici, come può credere chi legge occupare esso il secondo posto nella Nuova Serie di *Matematische Abhandlungen aus dem Verlage mathematischer Modelle von Martin Schilling Halle a. S.*, ed essere collegata alla Serie XXV delle figure edite di questa Casa. G. L.

G. Frizzo. *De numeris libri duo. Authore Johanne Noviomago; esposti e illustrati.* Verona-Padova, F.lli Drucker, 1901, 8.°, p. 174 [Prezzo L. 3].

Giovanni Broukhorst (1494-1570), volgarmente conosciuto sotto il sopranome di Noviomago, derivato da Nimwegen sua patria, ha un posto nella storia delle scienze esatte, oltre che per essere stato editore di Beda il Venerabile e traduttore della *Geografia* di Tolomeo, come autore di una operetta di aritmetica che, sotto il titolo *De numeris libri duo*, venne stampato a Parigi nel 1539. Questa è spesso citata (1) essendo l'unico scritto ove sia serbata notizia di uno strano

(1) Nesselmann, *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p. 83-4; Cantor, *Mathem. Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863), p. 166, e *Vorlesungen üb. Gesch. der Math.*. T. II (2.e Aufl., Leipzig, 1900), p. 410; Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer* (Erlangen, 1869), p. 12-13.

Digitized by Google

procedimento per indicare i numeri, il quale è di origine incerta (caldea?) e di scopo ed usi (da parte degli astrologi?) non chiari. Una copia di questo lavoro, esistente nella Biblioteca di Forlì, essendo caduta sotto mano all' Egregio Prof. Frizzo — ben noto, non solo per molte pubblicazioni di carattere didattico, ma anche per avere, nel 1883, dato alle stampe *Le regoluzze di Maestro Paolo dell' Abbaco* — egli pensò essere prezzo dell' opera il divulgarne la conoscenza fra gli studiosi. Ma invece di riprodurla integralmente e fedelmente, la compendiò e commentò: è questo un sistema che potrà forse non riscuotere il plauso di coloro i quali non ammettono se non le riproduzioni diplomatiche, ma che indubbiamente otterrà l'approvazione di chi loda tutti i lavori capaci di diffondere la conoscenza delle opere delle età passate, qualunque siano d' altronde i mezzi a tal fine adoperati; e certamente, quando si tratti di lavori non molto originali ed importanti — come è per l' appunto quello del Noviomago — una semplice ristampa non avrebbe attratto che scarsi lettori, mentre una particolareggiata recensione, accompagnata da commenti, da raffronti e (per dir tutto) da belle figure illustrative — quale è quella che ci sta dinnanzi — sedurrà molti col fascino che emana da ogni cosa bella.

Il primo libro dell' opera del Noviomago è diviso in *ventisette* capitoli; esso ha per iscopo di fare conoscere i procedimenti che vennero suggeriti per indicare i numeri della serie naturale e per effettuare le operazioni su di essi e le frazioni; è dunque un trattato di vera *logistica,* nel senso che questa parola aveva nell' antica Grecia; nel quale vediamo sfilare successivamente i segni numerali adoperati dai Romani e dai Greci, poi la nota *loquela digitorum* di Beda ed i simboli degli astrologi caldei (v. sopra) e da ultimo le nostre cifre. Non è il caso dilungarsi su quanto Noviomago espose riguardo alle operazioni aritmetiche sui numeri interi; basti rilevare nel Cap. XIX quello speciale procedimento abbreviativo per la moltiplicazione di due numeri a, b della prima decina, fondato sull' identità

$$a\,b = (10 - a)\,(10 - b) + 10\,(a + b - 10),$$

e che, evidentemente è una generalizzazione della così detta *regula Nichomachi* per calcolare il quadrato di un numero di una cifra (1). Un cenno va anche fatto delle nozioni esposte sulle progressioni e sull' uso del *pallottoliere*, intorno alle frazioni e le regole del tre. « Tutto questo primo libro, osserva il Prof. Frizzo, riluce per una ragguardevole genialità didattica giustificata dal fatto che il Noviomago, dopo avere mostrato con rara efficacia la utilità e necessità della logistica, non si limita punto ad esporne aridamente i precetti,

(1) Cântor, *Vorlesungen,* T. I, (2.ª ed., Leipzig, 1894), p. 404.

Digitized by Google

ma questa esposizione egli rende particolarmente leggiadra con piacevoli raffronti ed opportune digressioni nelle lettere, nella storia, nelle scienze, esempio codesto che anche nelle nostre scuole dovrebbe essere saggiamente imitato, ricordando le multiformi applicazioni della matematica alle scienze ed alle arti e rievocando il nome di coloro, che, nello svolgersi dei secoli, maggiormente concorsero al suo incessante e meraviglioso progresso ».

Il II libro è dedicato a Andrea Eygerd di Rostock e contiene i primi rudimenti della teoria dei numeri. Nessuna influenza esercitò sull' autore Diofanto, il che non deve recare meraviglia poichè soltanto nel 1575 l'*Aritmetica* venne stampata (in latino); ma invece Noviomago scelse a modelli Nicomaco, Teone Smirneo, Giamblico e li imitò in modo così pedissequo che egli potrebbe considerarsi ancora tanto aderente alle scuole neo-platonica e neo-pitagorica, quasi come rappresentante di un secondo rinascimento di quel misticismo numerico, le cui scaturizioni risalgono al filosofo di Samo ed al fondatore dell' Accademia.

Ma il libro II dell' opera di Noviomago rappresenta un vero regresso di fronte a quello degli aritmetici greci, giacchè, mentre ne ha tutti i difetti, non contiene le questioni più elevate e difficili di cui questi si occuparono. La dimenticanza in cui quell' opera è caduta è dunque il prodotto, non da incuria o ingiustificato disprezzo, ma l' effetto di un verdetto imparziale che la storia ha pronunciato. Il Prof. Frizzo con la sua pubblicazione non pretese di ottenere una modificazione di esso e nemmeno una revisione del processo: egli intese soltanto di « lumeggiare un caratteristico periodo scientifico » e vi è perfettamente riuscito (1).

G. L.

V. Volterra. *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali.* Discorso letto per la solenne inaugurazione dell' anno scolastico 1901-1902 nella R. Università di Roma. Roma, Tip. Pallotta, 1901, p. 26.

Era da tempo desiderio universale che qualche analista di professione, distogliendosi dalle consuete sue ricerche, si occupasse di studiare e misurare il valore e la portata dei varî tentativi che in questi ultimi decenni vennero fatti per sottoporre ad una trattazione matematica certi fenomeni che il mondo organico e la società presentano. È dunque da salutare con gioia il bel discorso con cui il

(1) Avvertiamo che in alcune copie dell' opera del Frizzo a p. 66 venne erroneamente stampato Wallis in luogo di Valla; lo avvvertiamo perchè il conseguente anacronismo non ponga il lettore in grave imbarazzo.

Digitized by Google

Prof. Volterra rese conto delle idee che in lui suscitarono gli sforzi da varie parti fatti per applicare il calcolo agli elementi della teoria dell' evoluzione organica (Galton, Schiaparelli, Pearson) ed alle teorie classiche dell' economia politica (Walras, Pareto). L' occasione in cui l' illustre successore di Beltrami manifestò tali idee non consentì lunghi sviluppi e discussioni profonde, onde è da augurarsi che egli completi questo suo scritto d'occasione con altro di mole più conforme alla vastità e profondità del tema. E poichè, secondo lui, « il meccanico ravvisa nel processo logico per ottenere le condizioni dell' equilibrio economico, lo stesso ragionamento che egli fa per stabilire il principio dei lavori virtuali, e, allorchè si trova dinnanzi alle equazioni differenziali dell' economia, prova il desiderio di applicarvi per primo quei metodi d' integrazione che ben conosce alla prova », così è generale il voto che egli ceda a questo desiderio, e rechi così alla scienza sociale un contributo di altezza paragonabile a quella dei progressi che a lui devono l' Analisi e la Fisica matematica.

G. L.

A. B. Basset. *An elementary Treatise on cubic and quartic Curves.* Cambridge, Deighton Bell and Co. 1901. 8.° gr. p. XVI + 225.

Quest' opera contiene più o meno di quanto il suo titolo annuncia e promette. In *più* comprende una lucida esposizione analitica degli elementi della teoria generale delle curve algebriche e un compendio delle proprietà essenziali delle più note curve trascendenti (cicloide, epicicloidi, evolvente di circolo, catenaria, spirale logaritmica, spirale d' Archimede, spirale iperbolica, lituo). Ma per converso non include nè una completa teoria delle curve del terzo e del quarto ordine, nè una disamina completa di tutte le cubiche e le quartiche speciali; di quella teoria sono però tracciate con mano sicura le prime linee e di queste sono studiate le cubiche circolari in genere, la logogiclica di Booth, la trisettrice di Maclaurin, la cissoide di Diocle, la parabola cubica e la versiera, e quindi le quartiche bicircolari, le ovali di Cassini, di Gerono e di Cartesio, la lumaca di Pascal, la cardioide e la concoide di Nicomede. Basti ciò a provare quanto ricca e varia sia la materia trattata dal Sig. Basset e qual messe di utili cognizioni essa assicuri al giovane lettore.

Non possiamo nè vogliamo chiudere questo cenno senza dare notizia di alcuni utili complementi dall' autore proposti per la nomenclatura in uso. Per le curve dotate di punti doppi egli suggerisce l' epiteto *autotomiche*, da contrapporsi a quello di *anautotomiche* per le curve che non si annodano. Una curva chiusa è da lui denominata *perigrafica*, onde *aperigrafica* è una linea estendentesi all' infi-

Digitized by Google

nito. Una curva d'ordine pari perigrafica può constare di due o più porzioni perigrafiche, le quali possono essere interne le une alle altre, oppure ciascuna esterna a tutte le altre; nel primo caso la curva è denominata *endodromica*, nel secondo *esodromica*. Finalmente una curva si dirà *emipartita*, *bipartita*,, *tripartita* ecc., secondochè consta di una, due, tre ecc. parti distinte. Raccomandiamo ai futuri espositori delle teorie delle curve queste proposte che ci sembrano ragionevoli, come quelle che permettono di evitare certi giri di frasi lunghi ed incomodi.

G. L.

E. NETTO. *Lehrbuch der Combinatorik*. Leipzig, Teubner, 1901, 8.° gr. p. VIII + 290. [Prezzo del Vol. legato Mk. 9].

L'epoca circostante al punto di passaggio dal Sec. XVIII al XIX è caratterizzata, nella storia della matematica tedesca, da una scuola che considerava come fine supremo, che le scienze esatte dovevano raggiungere, il perfezionamento dell'analisi combinatoria. Le esagerazioni in cui in conseguenza cadde un Hindeburg, un Eschenbach, un Rothe gettarono un' ombra di ridicolo sopra una disciplina pur meritevole di considerazione e di studio; l'epoca in cui essi dominarono fu ritenuta come un periodo di decadenza e venne considerato come uno dei meriti di Gauss l'avere mostrato come ben altri argomenti esigessero e meritassero gli sforzi concordi degli investigatori. Tuttavia, riposta l'analisi combinatoria nel posto che non avrebbe mai dovuto abbandonare, essa trovò anche più tardi dei solerti cultori, i quali si adoperarono a perfezionarla spintivi assai spesso da questioni di algebra, di teoria dei numeri, di probabilità e anche di geometria. Raccogliere e coordinare i risultati conseguiti in tal modo è quello che il Netto fece concisamente in un articolo dell'*Enciclopedia matematica* e che ripetè con tutta la desiderabile ampiezza nell'opera che annunciamo ora.

La quale si apre con un Capitolo sopra le operazioni fondamentali dell'analisi combinatoria ed i risultati a cui esse conducono; ad esso ne segue un altro sul teorema del binomio e del polinomio. I seguenti concernono il calcolo del numero delle combinazioni *speciali;* ora tale specializzazione è di differente natura secondochè gli elementi dei gruppi studiati sono designati con le lettere $a, b, c, \ldots$ o con i numeri $1, 2, 3, \ldots$ I problemi che nascono nelle prime ipotesi sono trattati nel Cap. IV, gli altri nei tre successivi. Ad altre operazioni combinatorie più complicate è dedicato il Cap. IX ed a' problemi notissimi, collegati ai nomi di Steiner e Kirkmann, i due successivi. Alcune applicazioni dell'analisi combinatoria sono esposte nel Cap. XII e nell'ultimo sono adunate alcune formole importanti. Esatte citazioni

Digitized by Google

agevolano il risalire alle fonti e un particolareggiato indice alfabetico rende facile il consultare l'opera del Netto.

Da questo cenno, forzatamente troppo breve, non risulta, come sarebbe stato necessario, che il nuovo trattato del ben noto Professore dell'Università di Giessen è pei suoi meriti destinato a prendere posto nella biblioteca di qualunque matematico; chè, se l'analisi combinatoria non sta alla cima del grande edificio matematico moderno, essa è fondamento di molte parti di esso ed apre l'adito a parecchie altre, onde nessuno vorrà privarsi del vantaggio di averne sottomano gli elementi essenziali.

G. L.

Annuaire des Mathématiciens 1901-1902 publié sous la direction de C. A. LAISANT *et* AD. BUHL. Paris, C. Naud, 1902, 8.° picc. p. XXII+469. [Prezzo 5 fr.].

« Nessuno di coloro che si occupano in un qualsia misura di lavori di matematica ignora a quale diffusione prodigiosa sia oggi arrivata questa scienza. Su qualsia soggetto, una quantità di memorie, d'articoli, di note vengono pubblicate nel mondo intero ed in centinaia di raccolte poriodiche ed opere speciali; gli è da questo punto di vista che la Bibliografia matematica, la quale 25 o 30 anni fa era poco più d'un oggetto di semplice curiosità, è divenuta oggi una delle questioni gravi di cui bisogna preoccuparsi. Ma anche quando, col mezzo di informazioni bibliografiche sufficienti, colui che si consacra ad un soggetto speciale è giunto a conoscere alcuni dei lavori che vi si riferiscono, gli è in generale indispensabile di mettersi in relazione coi matematici le cui indagini procedono nella medesima direzione, sia per ottenere nuove indicazioni, sia per comunicare loro i risultati ottenuti, sia semplicemente per fare giungere loro i lavori recentemente pubblicati. In una parola, la corrispondenza fra matematici è oggi una cosa indispensabile.

Ma, per rivolgersi ad un corrispondente, non basta l'averne trovato il nome in fine di un articolo; bisogna sapere dove abita e possibilmente averne l'indirizzo esatto. La cosa non è così facile come sembra ».

Ed è appunto per agevolarla che venne progettata ed eseguita la pubblicazione che annunciamo, la quale porge anzitutto in ordine alfabetico i nomi di più di 6000 cultori e cultrici delle scienze esatte; considerata soltanto come un semplice bilancio delle forze matematiche attive, essa possiede una considerevole importanza, giacchè, al pari di tutte le opere che rasentano la statistica, permette di trarre delle conseguenze istruttive. Basti ad es. citare il fatto che in quell'elenco

Digitized by Google

di 6000 nomi, non meno di 180 appartengono al sesso gentile (1) e che fra essi si trova quello, ben noto in altri campi, di Miss Loïe Füller; curioso è anche l'incontrare nella lista dei nostri colleghi il nome di Vittoriano Sardou!

Un'opera come quella che ci sta sott'occhio è destinata fatalmente a presentare, almeno nelle sue prime edizioni, inesattezze e lacune e noi ne segnaleremo qui alcune, concernenti l'Italia, allo scopo di ostacolare il diffondersi di notizie errate e di aiutare i signori Laisant e Buhl nel lavoro preparatorio ad una nuova edizione.

Notiamo in primo luogo improprio l'annoverare fra i matematici il d'Achiardi (non *d'Archiardi*), il Briosi ed il Taramelli ed errato il chiamare *del Giudice* invece che *del Gaizo* il noto cultore della storia della medicina. La morte ha poi già colpiti i professori Bertoldo, Cua, Fellizzati, Gobbi-Belcredi, Legnazzi, Perroni e Turazza, onde i loro nomi non potevano più trovar posto nell'*Annuaire* per l'anno *1901-1902*. Ai compilatori del quale rimasero altresì ignoti molti recenti traslochi o collocamenti a riposo, fra cui ricorderemo quelli di Almansi, de Berardinis, Bortolotti, Ciani, Daniele, Fano, Fibbi, Finzi, Grassi, Lombardi, Morera, Ovazza, Pannelli, Perna, Pizzetti, Porro, Vailati e Volterra. Meno numerosi, ma più strani, sono certi sdoppiamenti che subirono taluni. Così: il Bagnera si presenta col suo vero nome, nonchè sotto quello di Baguera; il Celoria prima come Giovanni e poi come Jean; un altro noto matematico prima come Enriques Federigo poi come Enriquez Federico; due volte s'incontra la signorina Massarini e due volte il Prof. Nicoletti, due Oseletto Tersilla (una anzi come se Tersilla ne fosse il cognome e Oseletto il nome) e due tanto il Prof. Porchiesi quanto il Prof. Tedone; Volterra Vito si presenta poco prima come Vito Volteira, ed il Vassilief della pag. 349 non differisce dal Wassilief della pag. 359.

Dovremmo fare anche qualche osservazione sull'ortografia dei nomi di alcune città, ma per brevità le sopprimiamo. Invece non possiamo tacere che certe traduzioni in francese di nomi di scuole (specialmente tedesche) renderanno difficile il rintracciare coloro che v'insegnano. Così, perchè tradurre *Technische Hochschule* con *Université technique;* e perchè ritenere equivalente *Collége royal* a *Realgymnasium*?..... Affinchè l'*Annuaire* consegua il fine che si è proposto è da augurarsi che nelle annate venture i nomi delle varie scuole vengano dati nella lingua originale. In tali annate poi sarà facile ai compilatori di rendere meno incompleti gli elenchi delle pubblicazioni periodiche e delle società

(1) Va rilevato che molte signore sono notate nell'*Annuaire* soltanto perchè appartengono alla Società astronomica di Francia, la quale annovera molte socie nell'aristocrazia francese ed in quella russa.

Digitized by Google

scientifiche (che seguono l'elenco alfabetico dei matematici), ricorrendo al *Catalogo internazionale della letteratura scientifica*, attualmente in gestazione.

Rendono più importante ed attraente il volume esaminato un cenno su Hermite, scritto dal Borel ed accompagnato da un bel ritratto, nonchè alcune note scientifiche dovute a P. Appell, J. Petersen, A. G. Greenhill, C. Méray (sull'*Esperanto*) e P. H. Schonte.

G. L.

Tratado de trigonometria plana por CARLO WARGNY. Valparaiso 1901, 8.° gr., p. XII + 274.

Il tempo in cui la vecchia Europa aveva il monopolio incontrastato della ricerca scientifica è ormai finito. I germi, che avevano già dati frutti succulenti e gustosi al di quà dell'Oceano, sparsi poi in America, in Asia ed in Oceania hanno già cominciato a svolgervi; in conseguenza, non solo l'America Settentrionale, l'India e l'Australia hanno dato il loro contributo al patrimonio matematico dell'umanità, ma persino il Giappone si è ascritto fra i paesi ove la Geometria e l'Analisi vengono coltivate ed ora ci sta dinnanzi agli occhi un ottimo libro scritto, da uno che è Professore nel Liceo e nella Scuola Navale di Valvaraiso, col nobile intento di « contribuire alla maggiore diffusione delle scienze esatte nel Chilì ». Lo segnaliamo ai nostri lettori specialmente per essere desso attestazione indiscutibile nell'alto livello che la nostra scienza ha ormai raggiunto nell'America meridionale e promessa dei progressi che essa è destinata a compiervi. Del resto, anche prescindendo da tale significato, il libro del nostro collega chileno merita considerazione non piccola; fondato sulle più reputate esposizioni della trigonometria piana e ricco di un gran numero di eleganti esercizî, il favore dei professori e degli studenti è da augurargli e non può certo mancargli.

G. L.

E. HAMMER. *Sechstellige Tafel der Werte* $\log \frac{1+x}{1-x}$ *für jeden Werte des Arguments* $\log x$ *von* $3.0-10$ *bis* $9.99000-10$ (*vom Argument* $9.99000-10$ *an bis* $9.999700-10$ *sind die* $\log \frac{1+x}{1-x}$ *nur noch fünfstellig augegeben, von dort an vierstellig*). 8.° gr., p. IV + 73. Leipzig, Teubner 1902 [Prezzo del Vol. legato Mk. 3,60].

Il titolo di quest'opera ne indica sufficientemente il contenuto, caratterizzandola come un utile complemento alle ordinarie tavole logaritmiche. Essa è destinata a prendere il posto di una tavola ana-

Digitized by Google

loga (ma con cinque sole decimali) che F. W. Rex pubblicò nel 1881 in francese e tedesco. L'egregio Professore del Politecnico di Stuttgart, al quale la nuova opera è dovuta, si giovò per comporla di materiali fornitigli dal Rex e opportunamente chiuse il suo libro con esaurienti indicazioni sopra la costruzione e l'uso della sua Tavola, le quali lo renderanno meglio accetto ai pratici.

G. L.

F. Bohnert. *Elementare Stereometrie.* Mit 113 Figuren. Leipzig, Göschen 1902. 8.°, p. VII + 183. (Prezzo del Vol. legato Mk. 2.40).

È il IV vol. della *Sammlung Schubert.* La materia di essa è assai più elevata ed ampia di quanto potrebbe farlo credere il titolo che porta ed il numero di pagine che conta; valga a provarlo l'indice che ne diamo.

Parte Prima:

I. Stereometria di posizione. — II. Angoli solidi. — III. Volume di alcuni corpi semplici. — IV. La sfera. — V. I solidi regolari.

Parte Seconda:

VI. Il « corpo centrale » di Heinze; conseguenti calcoli di volumi. — VII. La regola di Simpson; cubature mediante considerazioni algebriche. — VIII. Cubature di solidi di rivoluzione mediante la regola di Guldin. Determinazione di centri di gravità — IX. Le coniche.

G. L.

A. Baule. *Lehrbuch der Vermessungskunde.* II erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit 280 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1901, 8.°, p. VIII + 471. [Prezzo del Volume legato Mk. 8.80].

Introduzione.

I.ª *Parte.* Teoria degli strumenti di misura.
- A. Le parti costituenti gli strumenti misuratori.
- B. Mezzi per segnalare i punti trigonometrici.
- C. Istrumenti per misurare gli angoli.
- D. Istrumenti per misurare segmenti.
- E. Istrumenti per misurarne altezze.
- F. Istrumenti per la misura delle acque.
- G. Conservazione degli strumenti.

II.ª *Parte.* Teoria delle misure.
- A. Misurazioni orizzontali.
- B. Misurazioni verticali.

III.ª *Parte.* Sulla teoria del disegno.

G. L.

Digitized by Google

GALILEO FERRARIS. *Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik gehalten in dem R. Museo Industriale in Turin. Deutsch herausgegeben von* D.r LEO FINZI. Mit 161. Figuren im Text. Leipzig, Teubner 1901, 8.0 gr., p. XII+358. [Prezzo del Vol. leg. Mk. 12].

Indice:

Cap. I. *Introduzione. Definizioni e teoremi generali sui vettori.* § 1. Campo d'un vettore - § 2. Campo di forza - § 3. Campo di forza newtoniano.

Cap. II. *Elettricità.* §. 1. Equilibrio elettrico - § 2. Fiume elettrico.

Cap. III. *Magnetismo.* § 1. Forze e masse magnetiche. Campi magnetici - § 2. Magnetizzazione. Distribuzione del magnetismo su magneti - § 3. Forze interne di un magnete. Induzione magnetica - § 4. Energia di un campo elettrico.

Cap. IV. *Elettromagnetismo.* § 1. Campi magnetici generati da cambiamenti elettrici - § 2. Forze elettromotrici generate nello stesso modo.

Cap. V. *Fiumi variabili.* § 1. Leggi fondamentali e considerazioni generali - § 2. Fiumi alternanti - § 3. Fiumi di scarica dei condensatori.

Cap. VI. *Trasmissione di vibrazioni elettriche.* § 1. Teoria elettromagnetica della luce di Manwell - § 2. Esperienze di Hertz - § 3. Trasmissione di energia in un campo elettromagnetico. *Appendice.* Unità elettriche e magnetiche.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

CORSO DI MATEMATICHE SUPERIORI

R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

(Anno 1899-900)

Studio sulle serie di funzioni.

Teorema generale sulle serie convergenti in ogni punto di un intervallo.

Dimostrazione del teorema di *Cantor* relativo al tendere a zero dei coefficienti nelle serie trigonometriche convergenti.

Sulla continuità di una serie di funzioni.

Condizione necessaria e sufficiente per la continuità di una serie

Digitized by Google

di funzioni continue, in un punto: in tutto un intèrvallo. Condizione necessaria e sufficiente per la continuità assoluta rispetto alle variabili n e x, della somma dei primi n termini, in ogni punto (x, ∞).

Gruppi di funzioni tutte contenute tra due numeri finiti e funzioni limiti.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista almeno una funzione limite continua. — Funzioni egualmente continue.

Dimostrazione dell'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie, senza presupporre la condizione di *Lipschitz*.

Condizioni di *Lipschitz*, di *Volterra* sufficienti per la unicità.

Metodo di *Picard*, o di *Peano*, delle approssimazioni successive.

Rappresentazione approssimata di una funzione continua mediante un polinomio razionale e intero, secondo *Weierstrass*.

Condizione necessaria e sufficiente per la sviluppabilità di una funzione in serie di *Taylor*, secondo *Prinsgheim*.

Teoria degli insiemi. — Numerabilità. — Gruppi non numerabili. — Corrispondenza biunivoca e reciproca tra gruppi in spazi di differente numero di dimensioni. — Gruppi derivati. — Numeri transfiniti. — Gruppi riducibili. — Gruppi perfetti. — Gruppi rinchiudibili.

Principio di condensazione delle singolarità. — Esempio di *Weierstrass*.

Funzioni continue che non ammettono mai derivate. — Esempio di *Weierstrass*.

Funzioni a variazione limitata. — La funzione di *Weierstrass* non è a variazione limitata.

Estremi oscillatori, secondo il *Dini*. — Proprietà fondamentale.

Teoremi di *Scheeffer* intorno alla questione: quand'è che dall'eguaglianza di due estremi oscillatori omonimi si può dedurre l'eguaglianza delle funzioni, all'infuori di una costante?

Integrale. — Varie forme della condizione di integrabilità. — Teorema di *Du-Bois-Reymond* sull'integrabilità di una funzione composta di più funzioni integrabili.

Integrale superiore e inferiore.

Funzioni ad integrale superiore (inferiore) nullo esteso a un tratto qualsiasi. —Funzioni ad integrale ordinario nullo in ogni parte dell'intervallo.

Digitized by Google

L'integrale di una funzione è sempre una funzione a variazione limitata.

Ognuno dei quattro estremi oscillatori di una funzione integrale differisce dalla funzione sotto il segno, per una funzione ad integrale nullo. — Se uno degli estremi oscillatori di una funzione continua è integrabile, lo sono anche gli altri, e integrati riproducono tutti la funzione primitiva, all'infuori di una costante.

Essistono funzioni finite e continue aventi in ogni punto derivata determinata e finita e non atta all'integrazione in alcuna parte dell'intervallo.

Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una serie di funzioni integrabili. Condizione sufficiente per l'integrazione termine a termine: per la derivazione.

Secondo teorema della media.

Integrali di funzioni con punti di infinito. — Integrali assolutamente convergenti: semi-convergenti. —Valgono tutte le proprietà degli integrali ordinari se il gruppo dei punti di infinito è *riducibile*.

Esempi di funzioni continue, non costanti, la cui derivata è nulla da per tutto, tranne nei punti di un gruppo perfetto rinchiudibile.

Anche per le funzioni con un gruppo riducibile di punti di infinito, l'integrazione e la ricerca di estremi oscillatori sono da riguardarsi come operazioni inverse, astrazione fatta da costanti e da funzioni di integrale nullo.

Estensione del secondo teorema della media.

Limite di un'integrale contenente sotto il segno il prodotto di una funzione a variazione limitata per una funzione contenente, oltre la variabile, un parametro che può crescere indefinitamente.

Serie trigonometriche.

Cenno storico sull'origine e sullo sviluppo della teoria.

Sviluppo di una funzione a variazione limitata in serie di *Fourier*. — Applicazioni.

Integrale di *Fourier*. — Fattore discontinuo di *Dirichlet*.

Prof. C. ARZELÀ.

Digitized by Google

NOTIZIE

TEMA RIPROPOSTO A CONCORSO DAL R. ISTITUTO VENETO. — « I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni ». Potranno anche essere premiate ricerche importanti che non risolvono completamente il tema. Scadenza 31 Dicembre 1902. Premio L. 3000.

* * *

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLA MATEMATICA. — Oltre alla traduzione in polacco della commemorazion fatta dal Prof. E. Pascal all' Istituto lombardo (cf. *Bollettino* T. IV, 1901, p. 32), traduzione dovuta al Dickestein e pubblicata nel giornale da questo diretto, vanno menzionate le seguenti:

F. KLEIN. *Gauss' Wissenchaftliche Tagebuch* 1776-1814 (nel Festschrift zu Feier der 150 en Besthens der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1901).

F. AMODEO. *Stato delle matematiche a Napoli del 1650 al 1732.* (Atti dell' Accademia Pontaniana, 1901-1902.

G. VIVANTI. *Il concetto d' infinitesimo e la sua applicazione alla matematica,* Saggio storico. Nuova edizione riveduta (Napoli, B. Pellerano, 1901).

G. LORIA. *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Libro V (ultimo). *L'aritmetica dei Greci* [I. La logistica greca. II. L'aritmetica nella Scuola di Pitagora. III. L'aritmetica nell'Accademia. IV. Neopitagorici e Neoplatonici. V. Diofanto. VI. Ricreazioni aritmetiche dei Greci]. (Mem. della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, 2.ª Serie, Vol. XII, 2.ª Parte) (1).

G. RICCI. *Origini e sviluppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria.* Discorso inaugurale letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il 5 Novembre 1901. (Padova, 1902).

G. LORIA. *Donne matematiche.* Lettura tenuta nella Grande Aula della R. Accademia Virgiliana. (Mantova, 1902).

* * *

QUESTIONE D'ASTRONOMIA PROPOSTA DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI DANIMARCA. — « Il n.° 3289 delle *Astronomische Nach-*

(1) Gli estratti si trovano in vendita presso la Libreria C. Clausen, Torino.

Digitized by Google

richten indica una trasformazione che, applicato al problema generale dei tre corpi, lo libera dalle singolarità provenienti dalla collisione di uno di questi corpi con gli altri. Siccome esistono infinite trasformazioni siffatte, così si può sperare che fra esse se ne trovi una capace di rimediare similmente alle conseguenze delle altre collisioni e di togliere quindi al problema tutte le singolarità. Per ciò l'Accademia propone la sua *medaglia d'oro* (del valore di L. 320 corone) come premio ad uno studio conclusivo sopra quelle trasformazioni ».

Le memorie possono essere scritte in una delle lingue danese, svedese, inglese, tedesca, francese e latina; e devono essere inviate anonime al Prof. H. G. Zeuthen, Segretario dell'Accademia, non più tardi del 31 Ottobre 1903.

*
* *

NUOVI DOCUMENTI PER LA STORIA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA contiene l'importante nota del Prof. Stäckel intitolata *Die Entdeckung der nichteuklischen Geometrie durch Johann Boyai* ed inserita nel Vol. XVII dei *Mathem. und Naturwiss. Berichtte aus Ungaru*. Essa rappresenta un primo frutto delle ricerche fatte dallo Stäckel nei manoscritti dei Bolyai serbati nel Collegio di Maros-Vásárheley ed ha come conclusione principale che Giovanni da solo ha concepita e svolta la sua scienza assoluta dello spazio. Estremamente curiose sono le lettere pubblicate nella citata nota in cui Wolfango, con calde e commoventi parole, si sforza di dissuadere il figlio suo dal dedicarsi a risolvere una questione a cui egli ha sacrificato invano la felicità di tutta la sua vita; ma Giovanni Bolyai era ormai tanto attaccato ad essa, che le parole di suo padre rimasero inascoltate; così una nuova disciplina geometrica vide la luce.

*
* *

RESOCONTI DI CONGRESSI. — Il Tomo V delle *Annales internationales d'histoire* (Paris 1901) contiene per esteso i lavori presentati al Congresso storico internazionale tenuto a Parigi nel 1900 (v. *Bollettino* Tomo III, 1900, p. 31); interesseranno principalmente i nostri lettori gli scritti dell'Heiberg (contenente il testo commentato di una breve memoria aritmetica di Anatolio), di E. Saavedra sulla risoluzione delle operazioni cubiche, di M. Cantor su alcuni particolari biografici relativi a Gauss, del Favaro (v. *Bollettino* Tomo V, 1902, p. 32), di M. Gallian sui problemi meccanici attribuiti ad Aristotele, del Carra de Vaux su uno scritto arabo avente attinenza con Apollonio Pergeo, di S. Günther sopra i sistemi astronomici intermedi fra il Tolemaico ed il Copernicano, di G. Enestrom sulla creazione

Digitized by Google

di un repertorio bibliografico per la storia delle scienze e di P. Tannery sopra una geometria analitica inedita dell'Ozanam e su alcune lettere al P. Mersenne. Il Tannery stesso presidente effettivo del Congresso aggiunse poi notevoli osservazioni ad alcune delle enumerate comunicazioni.

Gli *Atti del secondo Congresso dei professori di matematica delle scuole secondarie tenute in Livorno nei giorni 17, 18, 19, 20. 21 e 22 Agosto 1901* (Livorno 1902) sono formati anzitutto dai verbali delle adunanze e dalle relazioni, fatte dai Professori all'uopo incaricati, intorno alle modificazioni da arrecarsi ai programmi di matematica delle Scuole normali (Prof. A. Conti), delle Scuole classiche (Prof. B. Bettini), dello Scuole ed Istituti tecnici (Prof.ri S. Ortu-Carboni e G. Sforza) e delle Università (Prof. G, Pittarelli). Contengono poi per esteso le seguenti comunicazioni fatte al Congresso: Caminati, *Sulla divisione di un angolo in parti eguali;* Giudice, *Il concetto d' integrale esposto a scopo elementare;* Vailati, *Di un modo di riattaccare la teoria delle proporzioni fra segmenti a quella dell' equivalenza;* Biasi, *Sopra due definizioni contestate di Euclide;* Loria, *Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque;* Padoa, *Logica matematica e matematica elementare.*

***

Concorsi di indole didattica. — Il *Bollettino di Matematica* diretto dal Prof. A. Conti, nel n. 3 del corrente suo Anno I ha proposto i seguenti temi per due concorsi a premi: I. *Con quale indirizzo e con quali programmi ed orari convenga impartire l'insegnamento della matematica nelle Scuole tecniche e negli Istituti tecnici, finchè non sia alterato l'attuale ordinamento di queste Scuole.* II. *Nell'ipotesi che sia tolta dall'Istituto Tecnico la sezione fisico-matematica e che nel Liceo gli studi siano ordinati in due sezioni, una letteraria e l'altra scientifica, dire dello sviluppo che lo studio della matematica potrebbe avere nella sezione scientifica, dei relativi programmi ed orarî.* Scadenza 31 Dicembre 1902.

***

Italiane dottoresse in matematica. — Dalle interessanti note statistiche di recente pubblicate da V. Ravà sopra *Le laureate in Italia* (Roma, Tip. Cecchini, 1902) risulta che dal 1877 al 1900 *venti* donne conseguirono il titolo ed il grado di *Dottore in matematica.* Sette di esse si laurearono a Pavia (Predella Lia, Sacchi Stella, Valentini Lucia, Crema Norma, Riva Maria, Moretti Anita, Magnani Teresa), tre a Padova (Bisson Ersilia, Pressi Cornelia, Maestro Ida),

Digitized by Google

due in ciascuna delle Università di Napoli, Pisa, Roma e Torino (Massarini Iginia, Tagliacozzo Emilia; Fabri Cornelia, Grassi Anaide; Vanni Elena, Todaro Sofia; Terracini Ida, Levi Costantina), una a Bologna (Bortolotti Emma) ed una a Messina (Desimone Lucia). Siffatte lauree vennero conferite una in ciascuno degli anni 1887, 1891, 1892, 1893, 1900; due negli anni 1894, 1896, 1898, 1899; tre nel 1895; e quattro nel 1897.

* * *

PROGRESSI DELL' « ESPERANTO ». — La nuova lingua, che i nostri lettori conoscono (*Bollettino*, T. III, 1900, p. 127), specialmente grazie all'attiva propaganda del Méray, in Francia va diffondendosi. E il primo fascicolo pubblicato nel 1902 dalla *Revue Bourguignonne de l'enseignement supérieur*, contiene due articoli relativi alle scienze esatte (*Le cadran solaire de Dijon* e *À propos des V Postulatum d'Euclide*), il primo redatto in francese ed accompagnato da una traduzione in Esperanto, l'altro scritto in questa lingua.

* * *

TEMA PROPOSTO DALLA SOCIETÀ OLANDESE DELLE SCIENZE (HARLEM). « Verso la metà del XVII Secolo nel Giappone si è svolta una particolare scienza matematica (vedi Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. III, 1898, p. 646-650, come pure *Revue semestrielle des publications mathématiques*, T. VI, 2.ª Parte, p. 18-23), di cui è ignoto con precisione sino a quale punto essa debba la propria origine ad influenze straniere. Ove siffatta influenza sia esistita, non è improbabile ne sia stato veicolo la lingua olandese, di modo che tale influenza sarebbe provenuta da lavori olandesi originali o tradotti. Checchè ne sia, la Società richiede uno studio sopra la natura ed il grado di questa scienza giapponese ed in pari tempo una ricerca delle sue relazioni con la scienza europea ».

I lavori dei concorrenti possono essere redatti in olandese, francese, latino, inglese, italiano o tedesco; ma *non devono essere scritti di mano dell'autore*. Essi si devono inviare anonimi, col sistema consueto, prima del 1.º Gennaio 1904, al Prof. J. Bosscha a Harlem. Il premio consiste in una medaglia d'oro o in 150 fiorini, e potrà essere raddoppiato.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

Digitized by Google

ANNO V. LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

R. BONOLA. *Bibliografia sui fondamenti della geometria.* Parte III.
G. LORIA. Elenco delle pubblicazioni di Ernesto de Jonquières.
Recensioni ed annunzi: HADAMARD. *La série de Taylor et son prolongement analytique* [G. Vivanti.]. — LEMOINE. *Géométrographie* [G. L.]. — CZUBER. *Probabilités et moyennes géométriques* [G. Vivanti].
Necrologio. C. T. CAZZANIGA. — Elenco delle pubblicazioni di C. T. Cazzaniga [A. Viterbi].
Programmi e riassunti di corsi universitari: Università di Pavia. Corso di Analisi superiore. Anno 1901-1902 [E. Pascal].
Notizie: Il primo centenario della nascita di Abel. — Una lettura inedita di Jacobi. — Carteggio fra Aronhold e Hesse. — Una nuova Società matematica. — Argomenti di corsi universitari.

BIBLIOGRAFIA

Sui fondamenti della Geometria, in relazione alla Geometria Non-Euclidea

di ROBERTO BONOLA.

Parte III.

(Continuazione e fine v. pag. 41)

INDIRIZZO VETTORIALE (aggiunte).

RUDERT, E. — *Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann's Ausdehnungslehre* (Programmabhandlung N. 604, III. Realsch., 1899, Leipzig, 44 p.).

VAHLEN K. TH. — *Ueber Bewegungen und complexe Zahlen.* (Math. Ann. L V; 1902; p. 585-593).

WHITEHEAD, A. N. — *The geodesic geometry of surfaces in non Euclidean space* (Proc. L. M. S., XXIX, 1898; p. 275-324).

Id. — *A Treatise on Universal Algebra, with applications* — Libri V, VI. (Cambridge, University Press, 1898).

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI CHE SI RIFERISCONO ALLA MECCANICA ED ALLA FISICA MATEMATICA.

ANDRADE, J. — *Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques* (C. R., CVXVI, 1897; p. 394-396).

Id. — *Le groupe d'équivalence et ses bases cinématiques* (C. R. CXXXVI, 1898; p. 1775-1777).

Id. — *Sur quelques paradoxes de statique non-euclidienne* (Bull. S. M. de France, XXVII, 1899; p. 73-75).

BERRY, B. — *On the evaluation of a certain determinant which occurs in the mathematical theory of statics and in that of elliptic geometry of any number of dimensions* (Cambridge Proc. Phil. Society, IX, 1798; p. 2-10).

BURNSIDE, W. — *On two theorems in elementary kinematics* (Mes. of. Math XXV, 1895; 94-96).

Id. — *On the resultant of two finite displacements of a rigid body.* (Mess. of Math.; XIX; 1889-90; p. 104-108).

DE FRANCESCO, D. — *Sopra alcune formule elementari di geometria non-euclidea* — (Gior. Mat. XXXVI, 1898; p. 98-106).

Id. — *Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (Torino, Atti, XXXV; 1899; p. 34-38; p. 231-243).

Id. — *Alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico a tre dimensioni di curvatura costante.* (Napoli, Atti, X, 1899-1900).

Id. — *Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (Lincei, Rendiconti, (5), IX, 1900; p. 245-252).

Id. — *Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante* (Napoli, Rendiconti, (3), XXXIX, 1900; p. 15-16; p. 153-155),

Id. — *Su alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico, analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario* (Napoli, Rendiconti, (3), VI, 1900; p. 28-38).

Id. — *Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (Math. Ann. L V; 1902; p. 573-584).

KLEIN, F. — *Mathematical Theory of the Top.* (New-York; Scribners's Sons - 1897).

LINDEMANN, F. — *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kräftesysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Vedi indirizzo proiett. aggiunte).

RICORDI. — *I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva* (Vedi indirizzo proiett. aggiunte).

Digitized by Google

SOMIGLIANA, C. — *Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico in uno spazio di curvatura costante* (Ann. Mat., XVI, 1888-89; p. 101-116).

SCRITTI STORICI, CRITICI, FILOSOFICI (aggiunte)

ALASIA, C. — *Poligeometrognomia generale e la geometria non-euclidea del Chrystal* (Trapani, Quo-Vadis?, I, 1901; n.° 5-6, p. 20-23; n.° 7-8, p. 19-21).

ANDRADE, J. — *L'enseignement de la géométrie et les géométries non-euclidiennes* (Enseignement Math., I, 1899; p. 114-126).

Id. — *Euclidien et non-euclidien* (Enseignement Math., I, 1900; p. 298-300).

BARBARIN P. — *Sur la géométrie des êtres plans.* (Bordeaux - Procès Verbaux - 1901).

BONNEL, I. — *Les hypothèses dans la géométrie* (Mem. Acad. Lyon (3), V, 1898; 401-429).

Id. — *Les axiomes et les hypothèses dans la géométrie* (Paris, Hermann; 1899).

BURKHARDT, H. *Beiträge zu Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (Gött. Nachr. 1895; p. 114-118).

CAYLEY, A. — *Presidential Address to the British association* - September 1883 (Report Brit. Ass. for adv. of Science - 1883 — Math. Papers N.° 784; IX; p. 429-459).

CHRYSTAL. — *Non-Euclidean geometry* (Edimb. Proc; X; 1880, p. 638-644).

CHANDLER, C. H. — *Trascendental space* (Wisconsin Academie Trans. XI, 1897; p. 239-248).

CRAWLEY, E. S. — *Geometry: Ancient and Modern* (Popular Science Montly, 1901; p. 257-266).

DELBOEUF, J. — *La géométrie euclidienne sans le postulat d' Euclide* (Mem. Société R. de sciences; Liège; (2), XIX, 1897; 117 p.).

DUPORT, H. — *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (S. M. F. Bull. XXVII, 1899; p. 138-141).

DUPUIS, N. F. — *On trascendental Geometry* (Proc. and Trans. R. Soc. Canada, (2), III; 1898; p. 3-16).

CLINLOCK, Mc. E. — *On the early history of the Non-Euclidean geometry* (Bull. New-York Math. Soc., II, 1892; p. 144-147).

ENGEL, Fr. — *Nicolaj I. Lobatschefsky. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der Kaiserlichen Universität Kasan am 22. October 1893, von A. Wassiljef* (tradotto dal russo) (Zeits. für Math. und Phys. XL, 1895; p. 205-244).

Digitized by Google

ENRIQUES, F. — *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Rivista Filosofica; 1901; Vol. IV, p. 171-195).

FAGGI, A. — *Attraverso la geometria* (Rivista Filosofica, T. IV, 1901, 3-28).

FONTENÉ, G. — *Sur l'hypothèse Euclidienne* (Revue de Métaphysique et de mor. 1899; p. 183-188).

GALDEANO (de) G. Z. — *Nociones sobre los sistemas geométricas* (El Progreso Math., V, 1895; p. 57-67).

GALLUCCI, G. — *Geometria non-euclidea* (Il Pitagora, Giornale di Mat., I, 1895; p. 12-13; 21-23).

HADAMARD, I. — *Sur la forme de l'espace* (Bordeaux, Procès-verbaux, 1895-96; p. 24-25).

HALSTED G. B. — *New principles of Geometry* (Vedi Lobatscheffskij indirizzo elementare, aggiunte).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Monthly, IV, 1897; p. 10, 77-79, 101-102, 170-171, 200, 247-249, 269-270, 307-308).

Id. — *Scientific Books, Urkunden zur Geschichte* (Vedi Engel, Stäckel) (Science N. S. IX, 1899; p. 813-817).

Id. — *Report on progress in Non-Euclidean Geometry* (Proc. of the American Ass. for the adv. of science, XLVIII, 1899; p. 53-68); (The American Math. Monthly VI, 1899; p. 219-233).

Id. — *Non-Euclidean Geometry* (American Math. Monthly VII, 1900; p. 123-133).

Id. — *Non-Euclidean Geometry of teachers* (Popular Astronomy 1900).

Id. — *Lambert's Non-Euclidean geometry* (Bull. New-York Math. Soc. III 1893-94; p. 79-80).

Id. — *Nicolai I. Lobachévsky. Address prononced at the commemorative meeting of the imperial university of Kasan, October 22-1893, by A. Vasiliev;* Tradotto dal russo con prefazione (Austin Texas, 1894; 40 p.).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Montly, I, 1894; p. 70-72, 112-115, 149-152, 188-191, 222-223, 259-260, 301-303, 345-346, 837-973, 421-423).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and espository* (The American Math. Monthly, II, 1895; p. 10, p. 42-43, 67-69, 108-109, 144-146, 181-214, 256-527, 309-313, 346-348).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Monthly, III, 1896; p. 13-14, 35-36, 67-69, 109, 132-133).

Id. — *Darvinism and non-Euclidean Geometry* (Kasan, Boll. (2), VI, 1896 p. 22-25).

Digitized by Google

HALSTED, G. B. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Monthly, V, 1898; p. 1-2, 67-68, 127-128, 290-291).

Id. — *The introduction to Lobachévski's new elements of Geometry* (Vedi Lobatscheffkij, indirizzo elementare; aggiunte).

Id. — *Gauss and the non-Euclidean Geometry* (Science, N. S., XII, 1890; p. 842-846).

Id. — *Supplementary report on non-Euclidean Geometry* (Science, N. S. XIV, 1901; p. 705-717).

Id. — *The appreciation of non-Euclidean Geometry* (Science N. S. XIII, 1891; p. 462-465).

ISSELY, L. — *La géométrie non-euclidienne* (Bull. Soc. des Sciences Naturelles, Neuchâtel XXIV, 1895-96; p. 137-148; XXV, 1896-97; p. 253-255).

KARAGIANNIDES, A. — *Die nicht-euklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart* (Berlin, Mayer und Müller, 1893).

KLEIN, F. — *Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky Preises, Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie* (Kasan Boll. (2) VIII, 1898; p. 1-27), (Math. Ann. L, 1898; p. 583-600).

KOENIGSBERGER, L. — *The investigations of Hermann von Helmholtz on the fondamental principles of mathematics and mechanics,* (Tradotto dal tedesco). (Annual report of the board of regents of the Smithsonian instituten 1896; pubblicato nel 1898; p. 93-124).

LAGRANGE, Ch. — *Pour la géométrie euclidienne* (Belgique, Bull. (3), XXXVII, 1899; p. 506-521).

LECHALAS, G. — *Identité des plans de Riemann et des sphères de Euclide* (Brux. S. sc. XX, 1896; p. 167-177).

Id. — *L'axiome de la libre mobilité* (Revue de Méthaphisique et de Mor., 1898; p. 746-758).

LIE, S. — *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (Leipz. Ber. XLIV, 1892; p. 106-115).

LORIA, G. — *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche, § IX, X, p. 412-423* (Bibliotheca Mathematica II, 1901; p. 392-440).

MANSION, P. — *Sur la non-identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne* (Brux. S. sc. XX, 1896; p. 178-182).

Id. — *Sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non-euclidienne* (Mathesis (2), VII, 1897; p. 112-117; 134-139).

Id. — *Quelques documents récents sur les premières récherches de Lobatchefsky, J. Bolyai et Gauss en géométrie non-euclidienne* (Brux. S. sc. XXII, 1897-98; p. 44-45).

Digitized by Google

MANSION, P. — *Ueber eine Stelle bei Gauss, welche sich auf nicht-euklidische Metrik bezieht* (Deutscher Math. Ver., VII, 1899; p. 156-158).

Id. — *Mémoires de géométrie générale analytique; par M. Barbarin Rapport de P. Mansion* (Belgique, Bull. 1900; p. 28-42).

Id. — *Sur la géometrie non-euclidienne chez Gauss* (Brux. S. sc., XXV, 1901).

Id. — *Sur le postulatum d'Euclide* (Enseignement Math. II, 1900; p. 457).

NEWCOMB, S. — *The philosophy of hyperspace* (Bull. of American Math. Society, (2); IV, 1897-98; p. 187-195).

OVIDIO (d') E. — *Cenno della memoria del Sig. Colonnello de Tilly « Essai de géométrie analytique générale »* (Torino, Atti, XXIX, 1893-94; p. 65-67).

PASCAL, F. — *Repertorio di matematiche superiori. T. II, Cap. XX, XXI, p. 844-892.* (Milano, Hoepli, 1900).

PHILIPPOW, M. M. — *Lobatschefsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum* (Wissenschaftl. Revue N.° 15, 19, 22, 24, 25, 27, 28; 1894).

POINCARÉ, H. — *On the foundation of Geometry* (The Monist; A Quartely Magazine IX, 1898-99, p. 1-43).

Id. — *Des fondements de la géométrie; à propos d'un livre de M. Russel* (Revue de Métaphy. et de Mor., 1899; p. 251-279).

Id. — *Sur les principes de la géométrie; Replique à Russel* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1900; p. 76-86).

REINHARDT, N. — *Geometria non-euclidea e positivismo* (in russo) (Kasan, 1897).

REYES Y PRÓSPER — *Breve reseña historica de la geometria No-Euclidea* (Progreso Math. IV, 1894; p. 13-17).

RUSSEL, A. W. — *An essay on the foundations of Geometry* (Vedi Bertrand Russel, scritti storici, 9).

Id. — *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1898; p. 759-766).

Id. — *Sur les axiomes de la géométrie* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1899; p. 684-707).

Id. — *Essai sur les fondements de la géométrie* (Traduzione in francese dell'opera sopra citata; Paris, Gauthiers-Villars, 1901).

SCHISCHKIN, N. J. — *Lobatschefsky's Raum* (Fragen der Philosophie u. Psychologie, XXI, 1894; p. 115-135).

SCHOTTEN, H. — *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts* (Leipzig, Teubner, I Bd. 1890; II Bd. 1893).

SCHULTZ, J. — *Psychologie der Axiome* (Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht, 1899).

Digitized by Google

SEMIKOLENOW, G. — *Studien über die Geometrie von Lobatschefsky* (Teil I, Libau 1893; Teil II, Libau 1894).

ISOKOLOW, N. P. — *Bedeutung der Untersuchungen von N. I. Lobatschefsky in der Geometrie und deren Einfluss auf ihre weitere Entwickelung* (Bericht. d. phys. Math. Ges. zu Kiew. 1893; Kiew Nachr, p. 1-39; 1894).

STALLO, J. B. — *Concepts of Modern Physics.*

Id. — *La Matière et la Physique moderne*, Traduzione francese dall'opera precedente (Paris, Alcan, 1884).

STÄCKEL, P. — *Ein Brief von Gauss an Gerling* (Gött. Nachr, 1896; p. 40-43).

Id. — *Friederich Ludwig Wachter ein Beitrag Zur Geschichte der nicht-euclidischen Geometrie* (Math. Ann., LIV, 1900; p. 49-85).

SOREL, G. — *Le système des mathématiques* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1900; p. 407-428).

Id. — *Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie durch Johann Bolyai* (Math. u. Naturwissenshaf. Berich. aus Ungarn, XVII; 1901).

Id. — *Franz Schmidt* (Deutsch. Math. Verein; XI; 1902).

STORY, W. F. — *Hyperspace and non-euclidean Geometry* (Math. Review. I, 1897; p. 169-184).

TARRY, G. — *Géométrie plane des êtres plans* (Revue de Montheuil).

TCHELPANOFF, G. — *Rivista della letteratura riguardante la questione dell'intuizione dello spazio* (Kief. Boll. 1898; p. 1-14, in russo).

TIKHOMANDRITZKY, M. — *Sur le postulatum d'Euclide* (Enseignement Math. II, 1900; p. 385-388).

VASSILIEF, A. — *Nicolai J. Lobatschefsky* (Vedi Halsted; Engel).

Id. — *Il Gesuita Saccheri*, in russo (Kasan Boll., (2); III; 1893).

VILLAREAL, F. — *Geometria imaginarias ó no-Euclidianas* (An. de la Sociedad Cientifica Argentina; XLVI; 1898; p. 23-32, 67-92, 128-148).

ZINGER, N. J. — *Missverständnisse in den Ansichten über die Grundlagen der Geometrie* (Fragen d. Philosophie u. Psychologie; XXI, 1894; p. 115-135).

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI MATEMATICHE

DI ERNESTO DE JONQUIÈRES

(3 Luglio 1820 — 12 Agosto 1901)

Gli scritti contenuti nel seguente elenco sono disposti in ordine cronologico ed il valore di ciascuno è caratterizzato col *sistema degli asterischi,* da noi proposto (v. *Bollettino,* T. III, 1900, p. 69); cioè,

Digitized by Google

i lavori fondamentali ed ottimi sono contrassegnati con due asterischi; i secondarî con un solo; i lavori polemici, bibliografici o non esenti da mende non ne hanno alcuno. La giustificazione di ogni simbolo scelto si troverà, assieme ad una biografia dell'autore, nell'articolo intitolato: *L'oeuvre mathématique d'Ernest de Jonquières* (Bibl. mathem. 3.ª Serie, T. III, 1902).

G. Loria.

1855.

1.* Solution de la Question 306 (voir pag. 211). Nouv. Annales, T. XIV, p. 318-320.

2.* Solution de la Question 303 (voir pag. 117) (1). Nouv. Annales. Ib. id., p. 435-440.

3.* Démonstration des théorèmes de Nicollic (voir pages 263 et 425). Ib. id., pag. 440-443).

4.* Solution de la Question 310 (voir pag. 263). Ib. id., p. 444-445.

1856.

5.** Mélanges de géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le Traité de géométrie supérieure de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, etc. et de la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre. Paris, 8.°, p. VIII + 261.

6.* Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre determinée par quatorze points. (Extrait d'un Mémoire sur la génération des courbes géométriques, presenté par l'Auteur à l'Académie des Sciences). G. di Liouville, 2.ª Serie, T. I, p. 411-420.

7.* Démonstration de quelques théorèmes de M. Steiner (voir T. XIV, p. 141). Nouv. Annales, T. XV, p. 94-98.

8.* Solution géométrique de la Question 280 (Chasles). Ib. id., p. 99-102.

9.* Sur les N.os 170 et 652 de la Géométrie supérieure. Ib. id., p. 160-161.

10.* Démonstration géométrique des théorèmes de M. Steiner enoncés sous les n.os 5, 6 et 7 (voir T. XIV, p. 141 et 142). Ib. id., p. 190-196).

11.* Théorème concernant quatre coniques inscrites dans le même quadrilatère. Ib. id., p. 312-314.

(1) Il problema risolto porta in realtà il n.° 298.

Digitized by Google

12.* Problème sur cinq coniques et cinq droites anharmoniquement correspondantes. Ib. id., p. 365-370.

13.* Problème sur les courbes du quatrième ordre. Ib. id., p. 370-372.

14.* Note sur la Géométrie organique de Maclaurin, contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. II, p. 153-165.

15.** Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses applications de cette théorie. Ib. id., T. II, p. 249-266.

16.* Note relative au §§. XX du mémoire qui précède. Deuxième mode de déscription de la courbe du quatrième ordre determinée par quatorze points. Ib. id., p. 267-272.

17.* Applications diverses des théories de la géométrie supérieure. Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions. Nouv. Annales, T. XVI. p. 116-125.

18.* Solutions géométriques de la Question 369 (voir p. 126). Id. ib., p. 189-192.

19.* Solution de la Question 388 (Faure) (voir p. 183). Id. ib., p. 347-354.

20.* Cosmographie. Solution de la Question 331. Id. ib., p. 354-357.

21. Solution géométrique de la Question 377 (Harrison). Id. ib., p. 407-409.

1858.

22.** Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre. Mèm. prés. par divers savants à l'Acad. des Sciences, T. XVI.

23.* Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples des degrés supérieurs, et théorèmes rélatifs à ces courbes. Ann. di matem. T. I, p. 110-112.

24.* Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en Astronomie. Ib. id., p. 112-116.

25.** Note sur un problème de géométrie à trois dimensions. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. III, p. 53-56.

26.* Note relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace. Nouv. Annales, T. XVII, p. 51-55.

27.* Solution géométrique de la Question 296 (voir T. XIV, p. 142). Id. ib. (p. 399-403). Réctification Id. T. XVIII, 1859, p. 64.

1859.

28.* Solution de la Question 376 (voir T. XVI, p. 179). Nouv. Annales, T. XVIII, 1859, p. 129-138.

Digitized by Google

29.* Conique donnée par des points ou des tangentes. Id. ib., p. 215-217.

30.* Discussion d'un problème relatif à la construction des coniques. Id. ib., p. 404-406.

31.* Solution de la Question 443 (voir p. 77). Id. ib., p. 261-264. Addition Id. p. 406-407.

32.** Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. Construction de ces conique. Théorèmes relatifs aux contacts d'une série de coniques et d'un faisceau de droites. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. IV, p. 49-56.

33.** Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions. Id. ib., p. 81-92.

34.** Généralisation de la théorie de l'involution. Applications géométriques. Annali di Matem. T. II, 1859, p. 86-94.

1861.

35.* Solution de la Question 524 (Faure) (voir T. XIX, p. 234). Nouv. Annales, T. XX, p. 25-26.

36.* Solution géométrique des Questions 494 et 499 (voir T. XVIII, p. 444 e T. XIX, p. 43). Id. ib., p. 26-30.

37.* Théorèmes concernant les courbes géomètriques planes. Id. ib., p. 83-85.

38.* Solution de la Question 548 (voir T. XIX, p. 405, et T. XX, p. 56). Id. ib., p. 85-87.

39.* Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n. Id. ib., p. 206-210.

40.** Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes. G. di Crelle, T. LIX, p. 313-334.

41.** Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. VI, p. 113-134.

1862.

42.** Étude sur les singularités des surfaces algébriques. Noeuds ou points coniques. Giorn. di Liouville, 2.ª Serie, T. VII, p. 409-413.

1863.

43.* Note au sujet d'un article publié dans le Journal de Mathématiques, T. VI, 2.e Série. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. VIII, p. 71-72.

44. Corrispondenza. Giorn. di Matem., T. I, p. 128.

Digitized by Google

45.** Études sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque. Annali di Matem., T. V, p. 24-38.

46. Correspondance. Nouv. Annales, 2.ª Serie, T. II, p. 203-205.

1864.

47.* Formules exprimant le nombre des courbes d'un même système d'ordre quelconque, qui coupeut des courbes données d'ordre également quelconque, sous des angles donnés ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions données. C. R. T. LVIII, p. 535-537.

48.* Propriétés diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque. Id. ib., p. 567-571.

49.** Études sur les singularités des surfaces algébriques. Plans tangents doubles et triples. Nouv. Annales, 2.ª Serie, T. III, p. 5-21.

50. Questions 677, 678 et 679 (Schröter) (voir, 2.ᵉ Série, T. II, p. 522). Id. ib., p. 33-36.

51.** De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres. Id. ib., p. 97-111.

52. Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque. Id. ib., p. 218-222.

53.* Exercises sur la théorie des sections coniques. Id. ib., p. 504-508.

1865.

54.* Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certains formules qui s'y rattachent. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. X, p. 412-416.

55.** Propriétés des systèmes de surfaces d'ordre quelconque. C. R., T. LXI, p. 440-443.

1866.

56.* Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une reponse à quelques critiques de M. Chasles. (Paris, Gauthier-Villars, 1866), p. 21.

57.* Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre $[n < mr]$ avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n$ conditions quelconques. C. R., T. LXIII, p. 423-425.

Digitized by Google

58.* Détermination du nombre des courbes du degré r qui ont deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n' $(n+n'<mr-1)$, avec une courbe donnée du degré m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n - n'$ autres conditions. Ib. id., p. 485-488.

59.* Détermination du nombre des courbes de degré r qui ont, avec une courbe fine U^m du degré m, autant de contact d'ordre quelconque qu'on le voudra, et qui satisfont, en outre, à d'autres conditions données. Ib. id., p. 522-526.

60.* Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces. Ib. id., p. 793.

61.* Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes. Ib. id., p. 870-874, 909-954.

62.** Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques reflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques. G. di Crelle, T. LXVI, p. 289-321.

63.* Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque. G. di Matem., T. IV, p. 45-53.

64.** Note sur les séries de courbes à double courbure. Ib. id., p. 210-211.

65.* Note pour le *Giornale di Matematiche*. Ib. id., p. 212-213.

1867.

66. Documents rélatifs à une revendication de priorité (litogr. Paris, 4 Févr. 1867).

67. Lettre à M. Chasles sur une question en litige. Paris, p. 15.

1868.

68. Propriétés des réseaux de courbes et de surfaces algébriques. C. R. T. LXVII, p. 1338-1340.

69. Réponse à une observations présentée dans le *Giornale di Matematiche*. Nouv. Ann., 2.ª Serie, VII, p. 111-116; 192.

1869.

70.** Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques. Math. Annalen, T. I, p. 424-431.

1877.

71. Lettre de M. l'Amiral de Jonquières à M. Saltel sur une question en litige. La Rochelle, Typ. A. Siret, 1 pag. datata 23 Aprile 1877.

Digitized by Google

72.** Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver. Annali di Mat., 2.ª Serie, T. VIII, p. 312-328.

1878.

73. Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en somme quadratiques binaires; application à l'analyse indéterminée. C. R. T. LXXXVII, p. 399-402.

74. Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en somme quadratiques de la forme $x^2 + t y^2$, t étant en nombre rationnel positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équations determinées $y = x^2 + t(x + \alpha)^2$, $y^2 = z^2 + t(z + \beta)^2$. Nouv. Ann., 2.ª Serie, T. XVII, p. 419-425, 425, 433-446.

75. Études sur les décompositions en somme de deux carrés, du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme $4n + 1$, et de ce nombre lui-même. Formules et applications à la résolution complète, en nombres entiers, des équations $y = x^2 + (x - 1)^2$ et $y^2 = z^2 + (z + 1)^2$. Ib. id., p. 241-247, 289-310.

76.* Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solution en nombres entiers. Ib. id., p. 374-381.

77.* Au sujet des cas d'impossibilité d'une solution en nombre entiers de l'équation $x^3 \pm a = y^2$. Ib. id., p. 514-516.

1882.

78.* Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. C. R. T. XCV, p. 1144-1146.

79. Sur la formule recemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. Lettre à M. Bertrand. Ib. id., p. 1343-1344.

1883.

80.* Addition à une note sur les nombres premiers. C. R. T. XCVI, p. 231-232.

81.** Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques. Ib. id., p. 568-571.

82.** Sur la composition des périodes des fractions continues périodiques. Ib. id., p. 694-696.

83.** Additions aux communications précédentes sur les fractions continues périodiques. Ib. id., p. 832-833.

84.** Loi des périodes. Ib. id., p. 1020-1023, 1129-1131, 1210-1213.

85.** Sur les fractions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité. Ib. id., p. 1297-1306.

Digitized by Google

86.** Études des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement aux deux modes de fractions continues périodiques. Ib. id., p. 1351-1354.

87.** Lois de coïncidences entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. Ib. id., 1420-1423.

88.** Lois des identités entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. Ib. id., p. 1490-1493.

89.** Loi des identités entre les réduites des deux modes. Ib. id., p. 1571-1574.

90.** Études sur les fractions continues périodiques. Ib. id., p. 1721-1724.

91.* Considérations théoriques sur les flotteurs remorqués en divergence. Ib. id. T. XCVII, p. 1173-1178.

92.* Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l'eau. Ib. id., p. 1278-1281.

93. Notice sur la carrière maritime, administrative et scientifique du Vice-Admiral de Jonquières, Grand-Officier de la Légion d'honneur, Directeur général du Dépôt des cartes et plans de la Marine, Vice-Président de la Commission des phares, Membre de la Commission de l'Observatoire. Paris, 1883, p. 28.

1884.

94.* [Dernier théorème de Fermat]. C. R. T. XCVIII, p. 863-864.

95. Note sur le degré des surfaces osculatrices. Ib. id., p. 1025-1026.

96.* Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss. Ib. id., p. 1358-1362, 1515.

97. Sur la règle de Newton pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations algébriques numériques. Ib. T. IC, p. 62-67.

98. Sur deux théorèmes de M. Sylvester et sur la règle de Newton. Ib. id., p. 111-115.

99. Règle de Newton-Sylvester. Suite à deux communications précédentes. Ib. id., p. 165-170.

100.* Examen de deux points de doctrine relatifs à la Règle de Newton. Conclusions. Ib. id., p. 269-272.

101.** Sur les équations algébriques. I. Considérations générales. Équations binômes. Équations trinômes. - II. Équations polynômes. - III. Des équations irrationnelles. - Ib. id., p. 345-351, 469-473, 483-488.

102.* Théorèmes concernant les polynômes algébriques complets; application à la règle des signes de Descartes. Ib. id., p. 1143-1144.

1885.

103. Sur quelques singularités du phénomène des marées, à propos d'un Ouvrage de M. Hatt. C. R. T. C, 703-705.

Digitized by Google

104.* Sur une rélation de récurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques. Ib. id. T. CI, 1885, p. 415-417.

105.* Sur les transformations géométriques birationelles d'ordre *n*. Ib. id. 1885, p. 720-724.

106.* Solution d'une question d'analyse indeterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. Ib. id., p. 857-861.

107.* Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. Ib. id., p. 921-922.

108.** Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites. Giorn. di Mat. T. XXIII, p. 48-75.

1886.

109.* Étude arithmétique d'une équation indéterminée du troisième degré. Atti dell'Acc. pontif. dei Nuovi Lincei, T. XXXVII, p. 183-188.

110.* Étude sur les équations algébriques numériques dans leur relation avec la règle des signes de Descartes. Ib. id., T. XXXVIII, p. 55-74.

111.* Au sujet de certaines circonstances qui se présentent dans le mouvement de la toupie. C. R. T. CII, p. 1519-1522.

112. Notice sur la vie et les travaux de Louis-François-Clément Bréguet. Ib. id. T. CIII, p. 5-14 (Riprodotto nella *Revue maritime et coloniale,* Settembre 1886).

113.* Sur le mouvement d'un solide homogène, pesant, finé par un point de son axe de figure. Ib. id., p. 17-21.

114.* Note sur un principe de mécanique rationnelle et une démonstration dont Daniel Bernoulli s'est servi en 1757. Ib. id., p. 617-620.

115.* Étude sur une question d'analyse indéterminée. Giorn. di Matem. T. XXIV, p. 1-11.

1887.

116.* Sur les mouvements d'oscillation simultanés de deux pendules suspendus bout à bout. C. R. T. CV, p. 23-27.

117.* Sur les mouvements oscillatoires subordonnés. Ib. id., p. 253-255.

118. Recherche du nombre *maximum* de points doubles *(proprement dits et distincts)* qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'ordre *m*, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples, qui complètent la détermination de la courbe. Ib. id., p. 917-923.

119. Détermination du nombre maximum absolu de points multiples d'un même ordre quelconque *r*, qu'il est permis d'attribuer arbitraire-

Digitized by Google

ment à une courbe algébrique C_m, de degré m, conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe. Ib. id., p. 971-977.

120.* Génération des courbes unicursales Ib. id., p. 1148-1154.

121. Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque. Ib. id., p. 1203-1209.

1888.

122.* Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre douée de six points doubles. Rend. del Circolo mat. di Palermo, T. II, p. 118-123.

123. Détermination du nombre maximum de points doubles, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement, à une surface algébrique de degré m, dont la détermination est completée par d'autres points simples donnés. C. R. T. CVI, 1888, p. 19-26.

124. Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'ou dépendent les limites respectives des nombres de points doubles (ou, plus généralement, de points multiple d'ordre r) qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement. Ib. id., p. 156-162.

125. Sur quelques notions, principes et formules qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques. Ib. id., p. 234-241.

126.* Construction *géométrique* de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs. Ib. id., p. 526-529.

127.* Construction géométrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré determinée par diverses conditions. Ib. id., p. 907-912.

128.* Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs de la surface générale du troisième ordre. Ib. id., T. CVII, p. 209-215.

129.* Construction géométrique d'une surface, à points doubles, du quatrième ordre. Ib. id., p. 430-432.

129 bis.* Théorie élémentaire, d'après les méthodes de Poinsot, du mouvement de la toupie. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France, T. XLIV.

1890.

130. Su un point fondamental de la théories des polyèdres. C. R. T. CX, p. 110-115.

131. Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Ib. id., p. 169-173.

Digitized by Google

132. Note sur un mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres. Ib. id., p. 261-266.

133. Écrit posthume de Descartes sur les polyèdres. Ib. id., p. 677-680, 315-317.

134. Note sur un mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes: *De solidorum elementis*, la traduction et le commentaire de cet ouvrage. Ib. id., p. 677-680.

135.* Écrit posthume de Descartes intitulé « de solidorum elementis ». Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives. Bibl. mathem., 2.ª Serie, T. IV, p. 43-55.

136.* Écrit posthume de Descartes « De solidorum elementis ». Texte latin (original et revu) suivi d'une traduction française avec notes. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France, T. XLV, p. 325-379.

1895.

137.* Sur les dépendances mutuelles des déterminants potentiels. C. R. T. CXX, p. 408-410, 580.

138.* Démonstration d'un théorème sur les nombres entiers. Ib. id., p. 534-557.

139.* Sur une question d'algèbre qui a des liens avec le dernier théorème de Fermat. Ib. id., p. 1139-1143, 1236.

1896.

140. Sur une lettre de Gauss, du mois de Juin 1805. C. R. T. CXXII, p. 829-830.

141. Au sujet d'une lettre inédite de Gauss. Ib. id., p. 857-859.

142.* Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers. Ib. id., p. 1451-1455.

143.* Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers. Ib. id., p. 1513-1517.

144. Au sujet d'une précédente communication, relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers. Ib. id., T. CXXIII, p. 374.

145. Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné que peut être racine primitive. Ib. id., p. 405-406.

146. Berichtigung zweier Druckfehler in Band II von Gauss Werken. Gött. Nachr., p. 365.

Digitized by Google

1897.

147.* Sur certains points de la théorie des residus des puissances. Caractères distinctifs de nombres, ou racines, d'ou proviennent les résidus générateurs. C. R. T. CXXIV, p. 334-340, 428.

1898.

148.* Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes. C. R. T. CXXVI, p. 863-871, 992.

149.* Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques. Ib. id., p. 991-997.

150.* Addition à une précédente communication, concernant la théorie des formes quadratiques. Ib. id., p. 1077-1081, 1177.

151.* Formules générales donnant des valeurs de D pour lesquelles l'équation $t^2 - D u^2 = -1$ est résoluble en nombres entiers. Ib. id., p. 1837-1843.

152.* Extension du No. 162 des « Disquisitiones arithmeticae » de Gauss. Id. T. CXXVII, p. 596-601.

153.* Rapprochements entre les méthodes de Lagrange et de Gauss pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré. Ib. id., p. 694-700.

1899.

154.* Question 1371. L'Intermédiaire des mathématiciens, T. VI, p. 91-95.

1901.

155.* Au sujet d'une précédente communication. Rectification d'une erreur dans la communication Comptes rendus, T. CXXVI, p. 886. C. R. T. CXXXII, 1901, p. 750.

RECENSIONI ED ANNUNZI

J. HADAMARD. — *La série de Taylor et son prolongement analytique.* (Collection *Scientia*, série phys.-math. N. 12). Paris, Naud, 1901. IX-102 p. 8°.

L'autore di questo opuscolo, che occupa un posto eminente tra i cultori della teoria delle funzioni analitiche, riassume in pochi tratti, ma con mano maestra, le più recenti ricerche concernenti le serie di potenze, la loro continuazione analitica e i loro punti singolari.

Digitized by Google

Dopo avere esposto (C. I) le nozioni più elementari relative alle funzioni analitiche, egli enuncia (C. II) come il problema principale da risolvere quello di determinare *effettivamente* la continuazione d'una serie di potenze, problema che si scinde in due: calcolo della funzione in un punto qualunque, e determinazione dei punti singolari. Alla prima questione rispondono *teoricamente* le formole che danno i coefficienti delle serie dedotte, ma queste formole sono di uso difficile, oltrechè manca un criterio che guidi nella scelta della catena di punti intermedi che deve condurre dalla origine al punto considerato; per poter fare questa scelta con sicurezza, occorrerebbe aver risolta la seconda questione. Il nodo della difficoltà sta nella troppa generalità del problema; d'altra parte è difficile restringere il campo delle funzioni da studiarsi senza escludere alcuno dei casi più interessanti. Questa circostanza ha dato origine a due gruppi di metodi: gli uni affatto generali, gli altri riferiti soltanto alle forme più semplici di singolarità.

Un primo metodo *generale* (C. III), che consiste nello studio diretto della continuazione analitica, esige anzitutto la conoscenza del raggio di convergenza d'una data serie di potenze. A questo proposito si ha il teorema di Cauchy-Hadamard, il quale stabilisce che il raggio di convergenza R d'una serie di potenze $\sum_{m=o}^{\infty} a_m x_m$ è dato da:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{m=\infty}} \left| \sqrt[m]{a_m} \right|,$$

$\overline{\lim_{m=\infty}} u_m$ denotando il più grande dei valori limiti dell'insieme u_0, u_1, u_2, ... Sulla circonferenza di convergenza giacciono punti singolari, e si presenta il problema di determinarli. Un punto singolare è dato da $\lim_{m=\infty} \frac{a_m}{a_{m+1}}$, quando questo limite esiste (Fabry). Ma può più generalmente stabilirsi, sotto diverse forme (Hadamard, Fabry), un criterio per riconoscere se un dato punto della circonferenza di convergenza è o no singolare; come possono trovarsi (Leau) certe condizioni, sotto le quali esistono su questa circonferenza archi non contenenti alcuna singolarità.

Di continuazione non può parlarsi quando la circonferenza di convergenza è una sezione per la funzione considerata (C. IV), ciò che - come è noto (Pringsheim, Borel, Fabry) - costituisce il caso più generale. Non è però sempre facile riconoscere se una data serie si trovi in questa condizione; a ciò possono servire due teoremi dovuti, l'uno a Fabry, l'altro a Le Roy.

Ricerche *speciali* che si connettono con quelle sinora esposte sono

Digitized by Google

quelle (Hadamard) relative alla natura delle singolarità esistenti sulla circonferenza di convergenza (C. V). Così si può trovare la condizione perchè questa non contenga altra singolarità che un polo, e determinare l'affissa di quest'ultimo; e analogamente si può trattare il caso in cui i p punti singolari d'una funzione più vicini all'origine (p è un numero finito) sono poli. Per lo studio delle singolarità non polari conviene introdurre un nuovo concetto, quello di *ordine* d'un punto singolare. L'ordine della serie sulla circonferenza di convergenza è il massimo degli ordini dei punti singolari giacenti su di essa, ed è dato da:

$$\omega = 1 + \overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\lg |a_m|}{\lg m}.$$

In una classe abbastanza estesa di casi si possono determinare i punti singolari d'ordine massimo. Però non tutti i punti singolari sono d'ordine finito; anzi limitandosi allo studio dei punti di questa natura si vengono ad escludere casi interessanti.

Un secondo metodo *generale* (C. VI) consiste nella costruzione di espressioni atte a rappresentare una serie di potenze fuori del suo cerchio di convergenza. Esso comprende da una parte le ricerche di Cesàro, Borel, Padé, Stieltjes ed altri sulle serie divergenti (1), e le conseguenti costruzioni di serie di polinomi in base alle ricerche di Runge, Hilbert e Painlevé, dall'altra i teoremi recenti di Mittag-Leffler sulla rappresentazione d'una funzione analitica entro la *stella* ad essa appartenente, teoremi dai quali Leau ha dedotto una generalizzazione del suo metodo sopra ricordato per lo studio delle singolarità.

Un terzo metodo *generale* (C. VII) è quello di trasformazione, che consiste nel ridurre lo studio della funzione considerata a quello di una o più altre legate ad essa da note relazioni. Come esempio può citarsi il teorema (Le Roy): La funzione:

$$\varphi(x) = \int_0^1 V(t)\, f(tx)\, dt,$$

dove $V(t)$ è una funzione qualunque (purchè tale che l'integrale abbia un senso anche quando ai suoi elementi si sostituiscano i loro valori assoluti), non può avere alcun punto singolare che non sia tale per $f(x)$.

A questa categoria di ricerche si raggruppano due importanti teoremi, che portano rispettivamente i nomi di Hadamard e di Hurwitz:

La serie $\Sigma\, a_m\, b_m\, x^m$ non ha in tutto il piano altri punti singolari

(1) A tale proposito v. la recensione su Borel, *Leçons sur les séries divergentes* che uscirà in un prossimo fascicolo di questo *Bollettino*.

Digitized by Google

che quelli ottenuti moltiplicando tra loro le affisse dei punti singolari delle serie $\Sigma a_m x^m$, $\Sigma b_m x^m$.

La serie:

$$\Sigma \left(a_0 b_m + \binom{m}{1} a_1 b_{m-1} + \ldots + a_m b_0 \right) \frac{1}{x^{m+1}}$$

non ha altri punti singolari che quelli ottenuti sommando tra loro le affisse dei punti singolari delle serie $\Sigma \frac{a_m}{x^{m+1}}$, $\Sigma \frac{b_m}{x^{m+1}}$.

Le trasformazioni si possono considerare (C. VIII) sotto un punto di vista più generale (Bourlet, Pincherle), studiando, per esempio, l'insieme di tutte quelle che hanno la proprietà distributiva (*trasmutazioni lineari*). Importanti sono le trasmutazioni lineari *degeneri*, le quali conducono a qualche risultato notevole intorno alle singolarità delle funzioni (Pincherle).

Le teorie esposte sono suscettibili di generalizzazione in vario senso (C. IX). Le ricerche di Stieltjes e Borel sulle serie divergenti e sulle frazioni continue sono in parte applicabili alle serie a raggio di convergenza nullo. Si può tentare lo studio di serie i cui termini, anzichè essere semplicemente potenze della variabile, abbiano altre forme (Servant). Più importante è l'estensione alle funzioni di più variabili (Lemoine, Biermann, Lerch).

Infine come applicazioni (C. X) possono citarsi: la determinazione delle radici delle equazioni algebriche o trascendenti (Runge, Hadamard), lo studio delle serie trigonometriche (Painlevé), la ricerca delle proprietà aritmetiche dei coefficienti d'una serie (Tchebycheff, Teixeira, Hurwitz, Pincherle, Borel). G. Vivanti.

E. Lemoine. *Géométrographie ou Art des constructions géométriques.* Paris, C. Naud éditeur, 1902, 8.°, p. 87 [Prezzo 2 fr.].

Secondo i principii posti da Euclide una costruzione geometrica è legittima soltanto quando sia eseguibile *teoricamente* mediante rette e circoli, *in pratica* coll'aiuto della riga e del compasso; essa è tanto più semplice quanto è minore il numero delle linee che esige e tanto più esatta quanto più in essa predomina la circonferenza sulla retta. Per tradurre queste indicazioni un po' vaghe in un procedimento esatto e sicuro, da potersi porre nelle mani di qualunque geometra, sin dal 1888 il Lemoine ha proposto un metodo ed una speciale simbolica, che egli poi, aiutato da alcuni suoi conterranei, ha perfezionato, svolto e largamente applicato (1). È l'*arte delle costruzioni geometriche* o *Geo-*

(1) Si direbbe che l'utilità di siffatto metodo sia stata presentita dal Wiener, che, nel suo *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, indicò per ogni soluzione il numero delle costruzioni elementari che racchiude.

Digitized by Google

metrografia, alla quale in questi ultimi quattordici anni egli ha dedicato tutto il tempo che non consacrò alla geometria del triangolo e che ora espone in un corpo di dottrina, nell' opuscolo che annunciamo e che porta il N. 8 nella nota collezione intitolata *Scientia*. I fondamenti del procedimento immaginato dal Lemoine sono ormai assai noti, se non altro perchè si leggono nella più recente edizione (1900) dell' ottimo *Traité de géométrie* di Rouchè e de Comberousse; in Italia esso ha già trovato estimatori e cultori; onde crediamo non sia il caso di esporne qui l'essenza. Notiamo soltanto che esso ha già prestati alla geometria ottimi servigi, avendo condotto a surrogare le antiche soluzioni di certi problemi classici con altre di gran lunga migliori; valga ciò a evitare che il nuovo ramoscello sorto sul vetusto tronco della geometria venga spregiato e divelto, a raccomandarlo invece come meritevole di considerazione e di cura. Se, quindi, sarebbe da rammaricare che esso assorbisse troppe forze, ben degne di altro uso, sarebbe del pari da lamentare venisse totalmente trascurato. Appunto nell' ipotesi che la Geometrografia attragga l'attenzione di qualche lettore del *Bollettino*, è opportuno avvertire che l'opuscolo del Lemoine non è un ritratto completo e fedele dello stato attuale in cui quella teoria si trova; ed è da rimpiangere che l'autore non abbia coronata la sua opera con un elenco completo, o meglio con un' analisi esauriente, dei lavori che vi si riferiscono.

G. L.

Probabilités et moyennes géométriques, par E. Czuber, *trad. de l'allemand par* H. Schuermans, *préf. de* Ch. Lagrange. — Paris, Hermann, 1902, XII-244, p. 8.° [L. 8,50].

È una traduzione dell' opera di Czuber: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* (Leipzig, Teubner, 1884). Discorrere di quest'opera interessantissima sarebbe cosa superflua: essa è conosciuta e degnamente apprezzata dal pubblico matematico di tutti i paesi, come ne è prova il fatto che, dopo quasi vent'anni, è ancora sentito il bisogno di una traduzione di essa. Osserveremo solo che, a parte la sua importanza in rapporto alle scienze applicate, essa offre un vasto campo di esercizî sul Calcolo infinitesimale e su altre parti delle matematiche, sicchè la vediamo con piacere riapparire sotto una veste che la rende più accessibile agli studenti dei nostri Atenei.

G. Vivanti.

Digitized by Google

NECROLOGIO

Camillo Tito Cazzaniga

L'immatura fine del compianto Camillo Tito Cazzaniga — il quale giovane d'anni si era già potentemente affermato nelle Scienze matematiche, in guisa da dare sicura promessa che, ove la natura fosse stata con lui meno avara, nuove e ancor più luminose traccie avrebbe lasciato di sè nella Scienza — non poteva a meno di commuovere vivamente tutti quelli che si occupano delle discipline matematiche. Ed è perciò quasi doveroso che questo periodico dedichi un cenno alla memoria del lagrimato Estinto, onde sopra tutto ricordarne i meriti.

Camillo Tito Cazzaniga nacque a Virgilio, nei pressi di Mantova, il 9 Aprile 1872; quivi compì i primi studi, primeggiando sempre in tutto, talchè vinse un premio nella gara d'onore nazionale, in Lettere italiane, indetta fra i licenziati dagli Istituti tecnici.

Primo negli esami d'ammissione entrò nel Collegio Ghislieri, in guisa che egli, sprovvisto di mezzi di fortuna, potè compiere gli studi matematici nella R. Università di Pavia, conseguendovi trionfalmente nel 1896 il diploma di laurea colla memoria: « Sui determinanti infiniti » della quale riparleremo più innanzi. Insegnò poi con plauso nella Scuola consorziale di Magistero in Matematica annessa all'Università di Pavia, interrompendo per un anno il suo insegnamento per recarsi a Gottinga a compirvi un corso di perfezionamento, il che gli era stato reso possibile dall'aver conseguita per concorso una borsa di studio. Le sue notevoli pubblicazioni stavano per aprirgli l'adito a brillante avvenire: se non che nel 1899, cosa che è a rimpiangersi vivamente, una condanna subìta per ragioni politiche fu ritenuta motivo sufficiente per negargli la libera docenza. Preclusagli così, sia pure momentaneamente, la carriera universitaria, dopo aver tenuto per alcuni mesi come supplente l'insegnamento delle Matematiche superiori nell'Università di Pavia, gli fu giuocoforza accettare il posto d'insegnante di Matematica nel R. Istituto tecnico di Sassari. Pur troppo è probabile che qui l'insalubrità del clima e le amarezze cagionategli dalle contrarietà sofferte abbiano arrecato non lieve colpo alla sua fibra. Fatto sta che mentre, superate le primitive difficoltà, egli era in procinto di conseguire presso la R. Università di Messina quella libera docenza che un anno prima gli era stata negata per

Digitized by Google

l' Università di Pavia (il che gli avrebbe permesso d' entrare nell' insegnamento superiore, come ne aveva già avuti sicuri affidamenti da più d' una delle Facoltà matematiche italiane, le quali sarebbero state ben liete d' accoglierlo nel loro seno), lo assalì un morbo che non perdona. Così, dopo circa cento giorni di sofferenze continue, serenamente sopportate con quel carattere nobilissimo, adamantino che mai non si smentì neppure un momento durante tutta la sua travagliata esistenza, Camillo Tito Cazzaniga fu rapito il giorno 30 Ottobre del 1900 all' affetto della famiglia, di cui era il legittimo orgoglio ed al tempo stesso il valido sostegno, all'affetto degli amici, alle speranze della Scienza.

L' attività del compianto Cazzaniga si rivolse principalmente a due campi di ricerche: l' uno la teoria dei determinanti, l' altro la teoria delle funzioni seguendo l' indirizzo dei Weierstrass. Nel primo campo il lavoro più importante e per la novità dell' argomento trattato e per i notevoli contributi arrecati dal C. è senza dubbio quello *Sui determinanti d'ordine infinito*. Egli partendo da un nuovo criterio di convergenza d' un determinante infinito, che gli parve opportuno introdurre — criterio consistente nel considerare convergente un determinante infinito D nel quale, indicandone con $a_{i,w}$ gli elementi $(i, w = 1, 2 \ldots)$ e con $D_{m,n} = [a_{i,w}]$ $(i, w = -n \ldots o \ldots + n)$ i determinanti minori, sia:

$$\left| D_{m+p,\, n+q} - D_{m,n} \right| < \sigma$$

per m, n abbastanza grandi e p, q interi qualunque — studiò dapprima le proprietà fondamentali dei determinanti convergenti. Dopo passò a sviluppare la teoria di varie classi di determinanti infiniti presentanti particolare interesse; e chiuse l'importante monografia con un'applicazione ai sistemi lineari infiniti, studiando in particolare gli importanti risultati dovuti in questo campo al Prof. Pincherle.

Oltre a questo lavoro dobbiamo al C. una serie di interessanti pubblicazioni di minor mole intorno alle proprietà di speciali determinanti sì finiti che d' ordine infinito, ai loro sviluppi e alle operazioni che su essi si possono eseguire.

Nella Teoria delle funzioni il C. si segnalò per la geniale estensione al campo ellittico di teoremi fondamentali del Weierstrass, del Picard e d' altri autori intorno alle funzioni uniformi.

In una prima pubblicazione (*Funzioni olomorfe nel campo ellittico*) il C., prendendo le mosse da un'analoga ricerca del Prof. Pascal, rappresentò, valendosi della funzione σ di Weierstrass, sotto forma di prodotto infinito, una funzione doppiamente periodica di dati periodi che nell' interno del parallelogramma fondamentale ammetta

Digitized by Google

un sol punto singolare essenziale, punto limite di infiniti zeri. Indi costruì le più elementari trascendenti per il campo ellittico e dopo aver accennato come, mediante i risultati dell'Appell, sia facile estendere il teorema di Mittag-Leffler nello stesso campo, diede per questo campo i teoremi corrispondenti a quelli del Guichard per le trascendenti intere. Finalmente stabilì le formole atte allo sviluppo ed alla rappresentazione di funzioni meromorfe nel campo ellittico e di funzioni, ammettenti infiniti zeri nell'interno d'un cerchio posto alla sua volta entro il parallelogrammo dei periodi e sulla cui circonferenza esistano infiniti punti singolari della funzione, estendendo così un noto teorema del Picard.

In una seconda Nota (*Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico*) egli diede lo spezzamento in fattori primari di funzioni uniformi nel campo ellittico, pari, dispari o aventi gli stessi periodi della funzione sn. Un terzo lavoro (*Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico*) fu dal C. dedicato ad un'estensione del teorema del Picard sui *valori d'eccezione* delle funzioni intere, valendosene per la determinazione d'un limite superiore per il numero di valori d'eccezione che può presentare una funzione olomorfa *o meromorfa nel campo ellittico.*

Un altro lavoro del Cazzaniga (*Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie*) è dedicato a porre nella loro forma più generale gli integrali curvilinei e di superficie.

Elenco delle pubblicazioni di C. T. Cazzaniga

Nei *Rendiconti del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lettere*

1. Sopra i determinanti di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica - Serie II, vol. XXIX, 1896.
2. Sopra i determinanti gobbi - Serie II, vol. XXX, 1897.
3. Relazioni fra i minori di un determinante di Hankel - Serie II, vol. XXXI, 1898.
4. Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico - Serie II, vol. XXXI, 1898.
5. Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie - Serie II, vol. XXXIII, 1900.
6. Aggiunte ad una mia Nota intorno ai determinanti - Serie II, vol. XXXIV, 1901 (postuma).

Negli *Annali di Matematica pura ed applicata*

7. Sui determinanti d'ordine infinito - Serie II, vol. XX, 1897.
8. Intorno ad un tipo di determinanti nulli di ordine infinito - Serie III, vol. I, 1898.

Digitized by Google

9. Appunti sulla moltiplicazione dei determinanti normaloidi - Serie II, vol. II, 1899.

Negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*

10. Funzioni olomorfe nel campo ellittico - vol. XXXIII, 1898.
11. Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico - vol. XXXIII, 1898.
12. Intorno ai reciproci dei determinanti normali - vol. XXXIV, 1899.

Nei *Mathematische Annalen*

13. Précis d'une theorie élémentaire des determinants cubiques d'ordre infini - vol. LIII, 1900.

Nel *Giornale di Matematiche*

14. Sul calcolo di qualche determinante numerico - vol. XXXVI, 1898.
15. Due teoremi sulla teoria delle forme - vol. XXXVIII, 1900.

Nel *Periodico di Matematica*

16. Qualche complemento al teorema di Hunyadi su certi determinanti - Tomo XVI, 1900.

ADOLFO VITERBI.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

CORSO DI ANALISI SUPERIORE

Anno 1901-1902.

Le ricerche sulle equazioni ai differenziali totali di primo ordine furono cominciate da PFAFF sul principio del secolo passato (e da ciò quelle equazioni furono chiamate *pfaffiane*) e lo scopo principale era allora quello di ricavarne luce per il problema delle equazioni a derivate parziali di primo ordine. Fra i primi che se ne occuparono, e con questo intento, è da annoverarsi anche il grande JACOBI.

In prosieguo di tempo quella teoria si è andata sviluppando in varie direzioni, e notevoli progressi si son potuti conseguire quando ad essa si sono applicati i concetti e i risultati relativi alle teorie delle trasformazioni e della invariantività.

Digitized by Google

Le ricerche analoghe per le equazioni di ordine superiore al primo, se si eccettuano alcuni casi molto particolari trattati da GULDBERG, non erano state mai intraprese, per quanto, come credo d'avere io recentemente mostrato, il loro studio presenta un interesse non trascurabile, e di esse io mi sono perciò a varie riprese occupato in parecchi lavori pubblicati negli ultimi due anni (*Compt. Rend. de l'Acad. de Paris*, t. 130, 1900; *Math. Ann.*, t. 54; *Rend. Ist. Lomb.* (2) t. 33, 1900, p. 287; *ibid.*, p. 675; *ibid.*, t. 34, 1901, p. 563; *ibid.*, p. 1180; *Annali di Matematica* (3) t. 7; *Rend. Ist. Lomb.* (2) t. 35, 1902, p. 244).

Nel corso di Analisi Superiore da me dettato a Pavia in questo anno io mi sono proposto di sviluppare appunto i particolari di tutto questo complesso di teorie, su cui mi è sembrato interessante richiamare l'attenzione dei giovani, e il mio compito è stato, per le prime parti del corso, agevolato dalla pubblicazione recentemente avvenuta di un libro di EDUARD v. WEBER (*Vorl. über das Pfaff'sche Problem*, ecc. Leipzig, 1900) in cui è esposta la teoria completa, naturalmente solo per il caso del primo ordine. È del programma di questo mio Corso di lezioni che mi permetto di dare ora notizia ai lettori di questo periodico.

Milano, Giugno 1902.

ERNESTO PASCAL.

Sulla teoria generale delle equazioni ai differenziali totali di primo e second'ordine

PARTE I.

Sulle equazioni a derivate parziali lineari di primo ordine e sui simboli delle trasformazioni infinitesime

1. Generazione di una equazione a derivate parziali. — Trasformazione per cui la funzione incognita venga a comparire nell'equazione solo per mezzo delle sue derivate.
2. Equazione a derivate parziali lineare omogenea di primo ordine, $Xf = 0$, e sua generazione mediante gli $n-1$ suoi integrali indipendenti. — Sua soluzione generale. — Osservazioni sulle possibili soluzioni singolari ed esempio relativo. — Caratteristiche di una tale equazione. — Considerandone il primo membro come simbolo di una trasformazione infinitesima, ogni punto dello spazio si sposta lungo la tangente alla caratteristica passante per esso. — Superficie integrale come luogo di caratteristiche. — Esempi relativi alle superficie cilindriche, coniche, conoidi, di rivoluzione.

Digitized by Google

3. Trasformazione del simbolo X. — Se alcune delle nuove variabili sono integrali dell'equazione $Xf=o$, il numero dei termini della equazione trasformata resta ridotto.
4. Moltiplicatore di JACOBI. — Soddisfa ad una equazione a derivate parziali. — Il quoziente di due moltiplicatori è costante o integrale della equazione. — Se ρ è moltiplicatore, e ω una soluzione, sarà $\rho\omega$ un moltiplicatore, e ogni moltiplicatore si può porre sotto questa forma. — Espressione del moltiplicatore dell'equazione trasformata. — Conosciuti $n-2$ integrali e un moltiplicatore, si può con quadrature conoscere l'ultimo integrale. — Caso particolare di $\rho=1$ ed applicazione alle equazioni della dinamica.
5. Studio del simbolo operativo X. — La parentesi $(X_1 X_2)$, e sue proprietà. — Identità di JACOBI. — Identità contenute in una mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* del 1901, nelle quali si presentano i numeri Bernoulliani. — Studio di questi numeri; dimostrazione delle loro principali proprietà e delle relazioni ricorrenti fra essi esistenti. — Metodo per ricercare delle nuove relazioni di secondo grado fra i numeri Bernoulliani, seguendo gli sviluppi di un'altra mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* 1902.
6. Sistemi di equazioni $X_h f=o$, sistemi completi e teoremi relativi. — Sistemi completi sotto la forma Jacobiana *speciale*. — Un sistema completo di m equazioni in n variabili ammette sempre $n-m$ integrali indipendenti. — Metodo per trovarli. — Semplificazione notevole di MAYER colla quale l'integrazione si riduce a quella di un solo sistema di equazioni differenziali ordinarie. — Esempio relativo.

   Sistemi Jacobiani in senso più ampio. — Con una trasformazione di variabili il sistema resta Jacobiano. — Proprietà di questi sistemi in quanto ai loro integrali. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia Jacobiano. — Trasformazione di un sistema completo in Jacobiano. — Metodo di integrazione di un sistema Jacobiano ed esempio relativo.

   Rappresentazione geometrica degli integrali. — Caratteristiche delle equazioni date e superficie integrale. — Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema sia completo espressa mediante una costruzione geometrica relativa alle caratteristiche.

PARTE II.

Equazioni ed espressioni ai differenziali totali di primo ordine o pfaffiane

1. Significato geometrico di un sistema di $n-m$ equazioni pfaffiane in n variabili. — Sistema di equazioni $Xf=o$ *aggiunto* del dato. —

Digitized by Google

Forme simmetriche sotto cui possono mettersi il sistema dato e il suo aggiunto. — Sistema aggiunto di uno risoluto rispetto ai differenziali di $n-m$ variabili.

2. Sistemi completamente integrabili. — Il sistema aggiunto di uno completamente integrabile è completo e reciprocamente. — Forma di FROBENIUS per le condizioni della completa integrabilità. — Altra forma delle medesime condizioni: una certa matrice gobba deve avere per caratteristica $2n-2m$. — Applicazione al caso di una sola equazione. — Altra applicazione al caso in cui una espressione pfaffiana si possa ridurre alla forma $\rho\, df$, ovvero semplicemente df. — Dimostrazione del teorema che le indipendenti fra le equazioni pfaffiane di cui i coefficienti sono le note espressioni (ij) formate mediante i coefficienti di una equazione pfaffiana data, formano un sistema completamente integrabile.
3. Moltiplicatore di LIE e sue varie proprietà.
4. Sistemi completamente integrabili contenuti in altri più ampi. — Sistemi che diventano o restano completamente integrabili coll'aggiunta di relazioni fra le x. — Sistemi parzialmente integrabili. — Sviluppo delle considerazioni contenute in una mia Nota su questo soggetto nei *Rend. Ist. Lomb.* 1902. — Esempi relativi.

PARTE III.

Teoria invariantiva di una equazione pfaffiana

1. Riassunto della teoria dei pfaffiani, cioè delle radici quadrate dei determinanti emisimmetrici di ordine pari. — Notazione di JACOBI. — Teorema sullo sviluppo di un pfaffiano.
2. Invariante simultaneo di una espressione a derivate parziali e di una espressione pfaffiana. — Il sistema aggiunto è connesso invariantivamente al dato.
3. Le tre matrici A, B, C. — Relazioni fra le loro caratteristiche. — Queste sono invarianti.

   Classe di una espressione pfaffiana Δ. — Espressioni pfaffiane equivalenti. — Cangiamento della classe colla moltiplicazione per un fattore. — Cangiamento della classe coll'aggiunta di un differenziale esatto.

   Rango di una equazione pfaffiana. — Equazioni pfaffiane equivalenti.
4. Teoremi varii relativi alle espressioni pfaffiane omogenee.
5. Applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione pfaffiana. — Espressioni o equazioni pfaffiane che *ammettono* una o più trasformazioni infinitesime. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di equazioni pfaffiane sia completamente

Digitized by Google

integrabile è che esse ammettano tutte le trasformazioni infinitesime rappresentate dal proprio sistema aggiunto. — Ricerca di tutte le trasformazioni infinitesime che appartengono al sistema aggiunto di una equazione pfaffiana e che la lasciano invariata — Sistemi V e W. — Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una equazione pfaffiana senza appartenere al sistema aggiunto. — Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata, a meno di un differenziale esatto, una equazione pfaffiana. — Proprietà dei sistemi V e W. — Essi sono completi e invariantivamente connessi alla equazione data.

PARTE IV.

Il problema di Pfaff

1. Trasformazione di una espressione pfaffiana nel prodotto di un'altra con una variabile di meno, per un fattore finito contenente tutte le variabili. — Metodo di Pfaff. — Ulteriore riduzione e dimostrazione del teorema che condizione necessaria e sufficiente perchè due equazioni pfaffiane sieno equivalenti è che abbiano il medesimo rango.
2. Trasformazione di una espressione pfaffiana nella somma di un differenziale esatto e di un' altra contenente una variabile di meno. — Ulteriore riduzione e dimostrazione del teorema che condizione necessaria e sufficiente perchè due espressioni pfaffiane sieno equivalenti è che abbiano la medesima classe.
3. Costruzione, mediante i pfaffiani, del sistema di equazioni differenziali da cui dipende la riduzione di Pfaff. — Notevole semplificazione di Jacobi colla quale, nella ulteriore riduzione, in luogo di tanti sistemi di equazioni differenziali ordinarie, ne basta uno solo. — Caso in cui nella equazione mancano dei termini. — Esempi di risoluzione del problema di Pfaff.
4. Applicazione del problema di Pfaff all' integrazione di una equazione generale a derivate parziali di primo ordine. — Semplificazione di Jacobi. — Esempi. — Considerazioni varie sugl' integrali completi di una equazione a derivate parziali di primo ordine e metodo per passare dall' uno all' altro. — Esempi varii.
5. Il problema di Pfaff dal punto di vista della teoria delle trasformazioni. — Per effettuare la prima riduzione bisogna trovare gli $n-1$ integrali indipendenti di una delle equazioni del sistema V o W secondo i casi.

PARTE V.

Le equazioni ai differenziali totali di second' ordine

1. Sistemi di tali equazioni nel caso in cui si immaginano alcune delle variabili come dipendenti. — Esposizione di quanto è conte-

Digitized by Google

nuto nella mia Memoria nel vol. 54 dei *Math. Annalen.* — Sistemi completamente integrabili, parzialmente e singolarmente integrabili. — Il simbolo in parentesi quadra il cui annullarsi rappresenta le condizioni necessarie e sufficienti per la completa integrabilità. — Teoria del moltiplicatore. — Equazioni cui questo soddisfa. — Esempi.

2. Sopra certi sistemi di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di second' ordine. — Esposizione della mia Nota su questo soggetto nei *Rend. Ist. Lomb.* 1901. — Definizione di sistema completo per il caso del second' ordine. — Un caso particolare comprendente a sua volta quello dei coefficienti costanti. — Teorema relativo a questo caso. — Il caso di una sola equazione. — Esempio.
3. I sistemi di tipo generale ai differenziali totali di second' ordine. — Esposizione della mia Memoria negli *Annali di Matematica* (3) t. 7. — Completa integrabilità di una sola equazione. — Introduzione di varii simboli e relazioni fra essi. — Equazione di primo ordine aggregata alla data. — Completa integrabilità di un sistema. — Trasformazione di una forma ai differenziali totali di second' ordine. — Invariante simultaneo di una siffatta forma e di un' altra a derivate parziali lineare omogenea di second' ordine. — Sistema aggiunto. — Espressioni simmetriche per il sistema dato e il suo aggiunto. — Caso in cui le equazioni sieno risolute rispetto ad alcuni dei differenziali secondi. — Sistema completo di equazioni a derivate parziali di second' ordine. — Applicazione delle operazioni di primo e second' ordine su di un' espressione ai differenziali totali di second' ordine. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia completamente integrabile è che esso sia invariabile per tutte le operazioni della schiera generale rappresentata dal proprio sistema aggiunto.
4. Esposizione dei risultati dell' altra mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* 1901 sulla invariantività delle caratteristiche di certe matrici formate in un conveniente modo mediante i coefficienti di una data espressione ai differenziali totali di second' ordine.
5. Cenno sulle equazioni ai differenziali totali di ordine superiore al secondo, e dei risultati contenuti nelle mie due apposite Note nei *Rend. Ist. Lomb.* 1900. — Invariante simultaneo di due espressioni, l' una a derivate parziali e l' altra ai differenziali totali *di ordine qualunque*, ed esposizione dell' altra mia Nota, su questo soggetto, pubblicata nei *Rend. Ist. Lomb.*, giugno 1902.

Digitized by Google

NOTIZIE

Il primo centenario della nascita di Abel verrà solennemente ricordato, per iniziativa dell'Università di Christiania, nei giorni 4-6 Settembre di quest'anno: a tale commemorazione, alla quale prenderanno parte eminenti rappresentanti di tutte le nazioni civili, si associerà tutto il mondo matematico, che ammira in Abel uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi. In tale occasione verrà fatta una speciale pubblicazione, della quale non mancheremo di render conto.

* * *

Una lettura inedita di Jacobi, scritta in latino e pronunciata il 7 Luglio 1832 in occasione dell'ingresso del sommo geometra nell'Università di Königsberg, venne rinvenuta fra le carte di Franz Neumann e pubblicata da W. Dyck nei *Sitzungsberichte der k. b. Akad. der Wiss. zu München,* T. XXXI, 1901.

* * *

Carteggio fra Aronhold e Hesse. — Nel T. CXXIV del *Journal für reine und angew. Mathematik* S. Gundelfinger ha pubblicate tre interessanti lettere dirette da Aronhold a Hesse nell'intorno del 1850 e la minuta di una lettera del secondo al primo; i futuri storici della teoria degl'invarianti dovranno tenerne conto.

* * *

Una nuova Società matematica venne inaugurata a Berlino il 31 Ottobre 1901 sotto la presidenza del Weingarten; è la *Berliner mathematische Gesellschaft*, i cui atti si trovano allegati ai singoli fascicoli dell'*Archiv für Mathematik und Physik.*

* * *

Argomenti di corsi universitari. — L'ottimo *Bulletin of the American Mathematical Society* contiene in ogni sua puntata un ricco elenco degli argomenti di matematica svolti in 35 Università di Francia, di Germania, d'Inghilterra e degli Stati Uniti. Resta così soddisfatto un vivo desiderio che nutrivano tutti quelli che amano seguire il movimento scientifico e didattico del mondo intero. Sarebbe da augurarsi che elenchi analoghi venissero compilati per quanto si fa in Italia; il nostro *Bollettino* sarebbe lietissimo di ornarne le proprie colonne.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

Digitized by Google

ANNO V. OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

Recensioni ed annunzi: BOREL. *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions* [G. Vivanti]. — VERONESE. *Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici* [F. Palatini]. — BARBARIN. *Études de géométrie analytique non-euclidienne* [R. Bonola]. — ZEUTHEN. *Histoire des mathématiques* [G. L.]. — K. F. GAUSS. *General Investigations of Curved Surfaces of* 1827 *and* 1825 [G. Vacca]. — FRANKLAND. *The story of Euclid* [G. L.]. — RIGOBON. *Studi antichi e moderni intorno alla tecnica dei commerci* [G. Vacca]. — MOLK et TANNERY. *Fonctions elliptiques*, IV. [G. L.]. — MONTCHEUIL. *Sur une classe de surfaces* [G. L.]. - CAPELLI. *Aritmetica ragionata e algebra* [U. Ceretti]. — PERRY. *Hoehere Analysis* [G. Vivanti]. — BARDEY. *Algebraische Gleichungen* [G. L.]. — PIZZETTI. *Figura dei pianeti*.

Necrologio. E. L. FUCHS [G. L.].

Notizie: Ricerche di G. Bolyai. — Il IV vol. del « Poggendorff ». — Documenti per la matematica mediovale. — Errori di un grande. — Periodici scientifici italiani.

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. BOREL. *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. - Leçons sur les séries divergentes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1901, 8.°, p. VII-183.

È questo il terzo dei volumetti che il valente analista francese dedica alla teoria moderna delle funzioni (1), e non è certo meno denso di materia, meno interessante nè meno suggestivo dei due che lo precedono.

* * *

Le serie divergenti, usate senza scrupolo dai vecchi matematici, poi bandite dall'analisi per opera di Abel e di Cauchy, riapparvero

(1) Dei due primi volumi si è fatto cenno in questo *Bollettino*, T. III, 1900, p. 73-75.

Digitized by Google

sull'orizzonte un quarto di secolo fa in una memoria di Laguerre (1879); qualche anno dopo (1886) Stieltjes e Poincaré le presero in considerazione da due punti di vista diversi, e da allora i matematici furono indotti a chiedersi se non fosse troppo severo l'ostracismo inflitto a quegli enti analitici, e se da essi non potesse per avventura trarsi qualche vantaggio. Ed infatti, se fosse possibile far corrispondere a ciascuna serie divergente numerica un numero, ed a ciascuna serie divergente a termini variabili una funzione, per modo che il numero o la funzione potesse — almeno in determinate circostanze — sostituirsi esattamente o con approssimazione alla serie corrispondente, questo numero o questa funzione eserciterebbe lo stesso ufficio della somma d'una serie convergente, e potrebbe senza alcun pericolo essere denominato la *somma* della serie a cui corrisponde. È lecito adunque far uso delle serie divergenti, purchè l'ente (numero o funzione) che intendiamo rappresentato da una serie divergente sia tale, che alle operazioni analitiche (addizione, moltiplicazione, divisione, integrazione, derivazione) eseguite sulle serie corrispondano, almeno sotto determinate condizioni restrittive, le operazioni stesse eseguite sugli enti che esse rappresentano.

* * *

Poincaré parte da questa definizione: Se la serie $\sum_{t=o}^{\infty} C_t\, x^{-t}$ e la funzione $J(x)$ sono tali che per tutti i valori di n:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[J(x) - \sum_{t=o}^{n} C_t\, x^{-t} \right] = 0 ,$$

si dice che la serie *rappresenta asintoticamente* la funzione $J(x)$. Data dunque una funzione $J(x)$, se essa ammette una rappresentazione asintotica, i coefficienti di questa sono determinati successivamente dalle relazioni:

$$\lim_{x=\infty} J(x) = C_o, \quad \lim_{x=\infty} x\left[J(x) - C_o\right] = C_1, \quad \lim_{x=\infty} x^2 \left[J(x) - C_o - \frac{C_1}{x} \right] = C_2,$$

etc., sicchè la rappresentazione asintotica, se esiste, è unica. Al contrario una medesima serie può rappresentare asintoticamente più funzioni, giacchè v'hanno funzioni, come e^{-x}, la cui rappresentazione asintotica è una serie a coefficienti tutti nulli. Se si sottopongono ad operazioni analitiche funzioni suscettibili di rappresentazione asintotica, la funzione risultante ha — con certe restrizioni che non è qui il caso di accennare — per rappresentazione asintotica la serie ottenuta eseguendo le stesse operazioni (come si eseguiscono sulle serie convergenti) sulle serie che rappresentano asintoticamente le funzioni date.

Di qui risulta una conseguenza importantissima.

Digitized by Google

Data un'equazione differenziale ordinaria d'ordine qualunque n, è noto che si può trovare una serie, ordinata, p. es., secondo le potenze di $\frac{1}{x}$, che soddisfa *formalmente* all'equazione. Ne segue che la funzione rappresentata asintoticamente da quella serie, introdotta nel primo membro dell'equazione al posto della variabile dipendente, dà luogo ad una funzione a rappresentazione asintotica nulla. D'altra parte, se esiste un integrale dell'equazione suscettibile di rappresentazione asintotica insieme alle sue derivate sino all'n — esimo ordine, le relative rappresentazioni, introdotte nel primo membro dell'equazione, devono ridurlo allo sviluppo asintotico d'una funzione identicamente nulla, cioè a zero, in altre parole devono soddisfare formalmente all'equazione. Se quindi noi sappiamo *a priori* che l'equazione ammette un integrale della natura designata, è certo che la sua rappresentazione asintotica si troverà fra quelle che soddisfanno formalmente all'equazione. In particolare, se l'equazione è lineare e i suoi coefficienti sono polinomi, il numero degli sviluppi che soddisfanno formalmente all'equazione è eguale al numero degli integrali distinti di essa suscettibili di rappresentazione asintotica, quindi le serie rappresentano asintoticamente gli integrali. Praticamente poi queste serie possono servire a calcolare gli integrali stessi con approssimazione tanto maggiore, quanto più grande è il valore della variabile.

Borel studia il caso d'un'equazione lineare del secondo ordine avente per coefficienti delle serie di potenze di $\frac{1}{x}$, e quello più generale d'un'equazione della forma:

$$y'' = f(x, y),$$

e dimostra, sotto certe condizioni, l'esistenza di integrali suscettibili di rappresentazione asintotica.

* * *

Laguerre ha dato l'esempio d'un integrale di valore finito:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u},$$

che sviluppato secondo le potenze di $\frac{1}{z}$ dà luogo alla serie divergente per ogni valore di z:

$$\frac{1}{z} - \frac{1!}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \cdots,$$

Digitized by Google

la quale a sua volta è *formalmente* eguale alla frazione continua convergente:

$$F = \cfrac{1}{z+1-\cfrac{1}{z+3-\cfrac{4}{z+5-\cfrac{9}{z+7-\ldots}}}}$$

ed ha dimostrato che $J = F$.

Generalizzando l'idea di Laguerre, Stieltjes osserva anzitutto che, se la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a termini reali e positivi è divergente, la frazione continua:

$$F = \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} \tag{1}$$

è convergente per ogni valore reale positivo o complesso di z. Questa frazione può svilupparsi in una serie:

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots, \tag{2}$$

dove le c_i sono reali e positive, e tale serie è divergente per ogni valore di z. Reciprocamente, data una serie divergente (2), può dedursi da essa una frazione continua (1), essendo le a_i legate alle c_i dalle relazioni:

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}, \tag{3}$$

dove:

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 1,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

È naturale pertanto considerare la frazione continua come la rappresentazione analitica della serie divergente. A sua volta poi la (1) può trasformarsi in un integrale definito della forma:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{f(u)\,du}{z+u}, \tag{4}$$

Digitized by Google

dove $f(u)$ è una funzione essenzialmente positiva; anche questo integrale può dunque rappresentare la serie divergente (2).

Data una serie (2), tale che le a ricavate dalle c mediante le (3) formino una serie divergente, la funzione $f(u)$ che figura nel corrispondente integrale (4) è determinata in modo unico. Reciprocamente, data $f(u)$, le c sono determinate in modo unico mediante le:

$$c_n = \int_0^\infty f(u)\, u^n\, du\,;$$

e, se esse sono tali che le corrispondenti a formino uua serie divergente, la (2) è una serie divergente per ogni valore di z avente per rappresentazione analitica l'integrale (4). Poichè il problema di riconoscere se una funzione $f(u)$ soddisfa a tale condizione, come ha osservato Stieltjes, non può risolversi in generale, Borel si limita a considerare le funzioni che soddisfanno alla condizione alquanto più restrittiva:

$$\left| f(u) \right| < A e^{-m\sqrt{u}}, \qquad (5)$$

dove A, m sono costanti, e chiama *funzioni di Stieltjes* quelle che, insieme alle loro derivate sino ad un certo ordine λ, soddisfanno alla (5). Egli dimostra che ad un dato sviluppo corrisponde un'unica funzione di Stieltjes; inoltre — detta *serie di Stieltjes* una serie corrispondente ad una funzione di Stieltjes — fa vedere che le serie di questa natura possono sottoporsi ad operazioni analitiche come se fossero convergenti, e che le serie risultanti sono ancora — con qualche restrizione — serie di Stieltjes. Inoltre, a differenza di quanto accade per le serie di Poincaré, una serie di Stieltjes identicamente nulla ha per unico rappresentante analitico un integrale identicamente nullo. Segue da tutto ciò che, se un'equazione differenziale è soddisfatta formalmente da una serie di Stieltjes, l'integrale definito che la rappresenta è un integrale dell'equazione.

* * *

Un terzo punto di vista per la teoria delle serie divergenti è quello adottato sistematicamente per la prima volta da Cesàro. Egli chiama *semplicemente indeterminata* una serie divergente tale che, denotando in generale con s_r la somma dei suoi primi r termini, il rapporto:

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

tenda ad un limite al crescere indefinitamente di n; questo limite può dirsi la *somma* della serie, e coincide coll'ordinaria somma nel caso speciale in cui la serie è convergente. Una serie di tal natura

Digitized by Google

risulta p. es. dal prodotto di due serie non assolutamente convergenti, e la sua somma è il prodotto delle somme di queste.

Più generalmente Borel propone di chiamare *somma* d'una serie divergente $\sum_{i=o}^{\infty} u_i$ l'espressione:

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{c_o s_o + c_1 a s_1 + c_2 a^2 s_2 + \ldots}{c_o + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots},$$

dove $s_r = \sum_{i=o}^{r} u_i$, e:

$$c_o + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots = \varphi(a) \qquad (6)$$

è una funzione intera prefissata, ogni qualvolta tale espressione abbia un significato. Se si prende $\varphi(a) = e^a$, s si dice *somma esponenziale*, e le serie per cui s ha valore determinato chiamansi *sommabili*. La quantità s può anche mettersi sotto la forma:

$$s = \int_o^{\infty} e^{-a} u(a)\, da,$$

dove:

$$u(a) = u_o + \frac{u_1 a}{1!} + \frac{u_2 a^2}{2!} + \ldots$$

è una funzione intera, che dicesi *associata* alla serie considerata.

Se, oltre all'integrale s, esistono anche gli integrali:

$$\int_o^{\infty} e^{-a} \left| u(a) \right| da, \quad \int_o^{\infty} e^{-a} \left| u'(a) \right| da, \quad \int_o^{\infty} e^{-a} \left| u''(a) \right| da, \ldots,$$

la serie dicesi *assolutamente sommabile*.

La somma o il prodotto di più serie assolutamente sommabili è una serie assolutamente sommabile, la cui somma è rispettivamente la somma o il prodotto delle somme delle serie date.

Se una serie di potenze è assolutamente sommabile per $x = x_o$, essa lo è pure in tutti i punti del segmento che unisce l'origine al punto x_o, ed anche le sue derivate lo sono in tutti i punti di questo segmento, escluso al più il punto x_o; la somma della serie è una funzione analitica non avente alcun punto singolare nel cerchio descritto sul segmento $0\,x_o$ come diametro.

Segue di qui che: Se $P(u, v, \ldots, u', v', \ldots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, \ldots, x)$ è un polinomio nelle u, v, ... e nelle loro derivate, i cui coefficienti sono serie di potenze di x convergenti per $x = x_o$, e se in luogo di $u, v, \ldots$ si pongono delle serie assolutamente sommabili per $x = x_o$ e si opera su queste come se fossero serie convergenti, si ottiene una serie assolutamente sommabile in tutti i punti del segmento $0\,x_o$, escluso al più l'estremo x_o; la funzione analitica che ne è la somma, la quale

Digitized by Google

è regolare entro il cerchio avente per diametro $0x_0$, è quella stessa che si otterrebbe ponendo nel polinomio P in luogo delle $u, v, \ldots$ le somme delle serie considerate.

L'applicazione alle equazioni differenziali è ovvia: se una serie assolutamente sommabile soddisfa formalmente ad un'equazione algebrico-differenziale, la sua somma è un integrale dell'equazione.

* * *

Sia:

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots \qquad (7)$$

l'elemento d'una funzione analitica $f(x)$ corrispondente all'origine; e il campo d'esistenza C della $f(x)$ si estenda oltre il cerchio di convergenza della serie (7). Se x_0 è un punto del campo C esterno a questo cerchio, perchè la serie sia assolutamente sommabile in x_0 è necessario che $f(x)$ non abbia alcun punto singolare entro il cerchio di diametro $0x_0$, ed è sufficiente che non ne abbia alcuno nè all'interno nè sul contorno di questo cerchio. In base a questo teorema si può determinare un certo campo, detto *poligono di sommabilità*, tale che in ogni punto interno di esso la serie è assolutamente sommabile ed in ogni punto esterno non lo è, restando dubbioso soltanto il modo di comportarsi della serie sul contorno. Questo campo si estende al di là della circonferenza di convergenza su ogni raggio che congiunge l'origine con un punto non singolare di tale circonferenza; ma in molti casi esso la oltrepassa di poco. Però, se nella espressione (6) si pone come funzione $\varphi(a)$, invece della e^a, la e^{a^k}, dove k è un numero intero maggiore di *1*, si può estendere ulteriormente il campo di sommabilità; ed anzi, se l'insieme dei punti singolari di $f(x)$ è finito od ha per solo punto limite il punto all'infinito, dato un punto x_0 tale che il segmento $0x_0$ non contenga alcun punto singolare di $f(x)$ nè faccia con alcuna retta congiungente l'origine con un punto singolare un angolo commensurabile con π, si può determinare il numero k in modo che la serie sia assolutamente sommabile in x_0.

I metodi di Borel permettono di trattare, almeno teoricamente, il problema di determinare i punti singolari d'una funzione analitica, e conducono ad una nuova dimostrazione del teorema noto, che una serie di Taylor non è, *in generale,* continuabile fuori del suo cerchio di convergenza.

* * *

Data una funzione analitica $f(x)$, se si congiunge l'origine con tutti i suoi punti singolari e si tolgono dal piano i prolungamenti all'infinito di questi raggi, la parte rimanente del piano costituisce la *stella* appartenente alla funzione $f(x)$. Mittag-Leffler ha dato re-

Digitized by Google

centemente l'espressione d'una funzione in serie di polinomi valida entro tutta la stella. Borel, ponendo nella formola di Cauchy:

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)\,du}{u-x} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)\,du}{u\left(1-\frac{x}{u}\right)}$$

in luogo di $\left(1=\frac{x}{u}\right)$ gli sviluppi in serie di polinomi studiati da Runge e da Painlevé, ottiene infiniti sviluppi di $f(x)$ in serie di polinomi analoghi a quello di Mittag-Leffler. Tali sviluppi sono sempre convergenti entro la stella appartenente alla funzione, ma, per certe funzioni $f(x)$, lo sono anche fuori della stella, quindi ci danno una rappresentazione analitica d'una serie di potenze, non solo fuori del suo cerchio di convergenza, ma anche fuori del campo di esistenza della funzione analitica da essa generata; e di più possono costruirsi anche per certe serie di potenze a raggio di convergenza nullo, come avviene per un esempio sviluppato dal Borel, in cui una serie di questa natura dà luogo ad una rappresentazione analitica valida per tutti i valori reali e positivi o complessi della variabile.

Resterebbe a dimostrare che alle operazioni analitiche eseguite sulle serie corrispondono le stesse operazioni eseguite sulle loro rappresentazioni mediante serie di polinomi; e l'autore finisce coll'osservare che, quando questo risultato sarà raggiunto, tutte le varie teorie delle serie divergenti rientreranno come casi particolari in quella di tali sviluppi.

G. VIVANTI.

Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici (1.° biennio) di GIUSEPPE VERONESE professore nella R.ª Università di Padova, trattati con la collaborazione di PAOLO GAZZANIGA professore nel R.° Liceo di Padova. Ediz. II.ª. Verona, Padova, Fratelli Drucker, 1901, 8.°; parte I.ª pag. XX + 111 (prezzo L. 1,25), parte II.ª pag. IV. + 212 (prezzo L. 2,25).

È certamente con grande compiacenza che gli insegnanti, i quali prendono interesse alle pubblicazioni scolastiche del Prof. Veronese, possono constatare come nelle edizioni che man mano vanno succedendosi degli « Elementi di geometria » di questo illustre Autore la materia venga esposta in modo sempre più adatto alle menti dei nostri giovani, cosicchè senza mai perdere del suo incontestabile valore scientifico vada acquistando pregi sempre maggiori dal lato didattico questo libro, che è frutto delle profonde indagini di cui fanno fede molte e poderose pubblicazioni dell'A intorno ai fondamenti della

Digitized by Google

geometria (1). Ed è pure con soddisfazione e nello stesso tempo con orgoglio che possiamo constatare come l'opera del Veronese venga studiata e favorevolmente giudicata anche all'estero (2).

Il presente scritto non ha che il modesto scopo di porgere a chi non avesse letto questi « Elementi di geometria » un breve resoconto dell'ultima edizione dei medesimi, mettendo specialmente in rilievo quei punti nei quali la materia è presentata con una fisonomia diversa da quella degli altri libri di testo e tralasciando tutte quelle minute osservazioni che non si addicono alla genialità di quest'opera.

Anzitutto mi piace registrare tutti insieme i postulati che servono di fondamento all'edificio. Tre di questi postulati (I, IV, IX) domandano rispettivamente l'esistenza di punti distinti, di punti fuori della retta, di punti fuori del piano; i postulati II e III chiedono per la retta le proprietà caratteristiche del sistema lineare omogeneo (quelle proprietà cioè che la retta ha in comune con la circonferenza, col fascio di raggi ecc.), mentre il V pone l'unicità della retta passante per due punti ed il VI domanda quanto è necessario per poter venire a stabilire l'eguaglianza delle rette fra loro. Il postulato VII serve di base alla teoria dell'eguaglianza delle figure non appartenenti ad una retta e l'VIII a quella delle parallele. Il X è il postulato d'Archimede e l'XI quello della continuità della retta. — Mi pare che questa enumerazione sia più eloquente di qualsiasi dissertazione per convincere della semplicità del sistema di postulati scelto dall'A.

Siccome poi i postulati della geometria devono esprimere le nozioni primitive che relativamente alle forme geometriche vengono in noi suscitate dall'osservazione degli oggetti che rappresentano quelle forme nel campo dei sensi, così ogni postulato è preceduto da alcune considerazioni (osservazioni empiriche) fatte sugli oggetti suddetti, considerazioni che non hanno nessun legame necessario con lo sviluppo teorico della materia, ma che presentano soltanto interesse didattico perchè destinate ad agevolare all'alunno l'intelligenza dei postulati che le seguono, cosicchè esse possono venir modificate a

(1) Un lavoro recente del Veronese che gl'insegnanti possono leggere con diletto e profitto è la comunicazione al Congresso di Parigi del 1900 « *Les postulats de la Géometrie dans l'enseignement* ».

(2) Per limitarmi a qualcuno dei giudizi più recenti ricorderò quello del Dott. H. Thieme della Scuola superiore reale di Posen, il quale nel suo lavoro « Die Umgestaltung der elementaren Geometrie » (1900) così chiude l'esame degli Elementi del Veronese (ed. 1897): *Als Ganzes wie im einzelnen stellt jedenfalls die Arbeit Veronese's seinen Vorgängern gegenüber einen wesentlichen Fortschritt dar*, come pure quello del Prof. Schur del politecnico di Karlsruhe, noto autore di pregievoli scritti sui principi della geometria, il quale nella sua Memoria « Ueber die Grundlagen der Geometrie » (Math. Ann. vol. 55) dice: *Ich erwähne hier auch die vortrefflichen Elemente der Geometrie von Veronese (Padova 1897), in denen der Verfasser der Fondamenti zum ersten Male ein Elementarbuch der Geometrie geschaffen hat, das in Beziehung auf Strenge über Euklid hinausgeht.*

Digitized by Google

piacere dall' insegnante ed anche tralasciate. Ed è molto importante il notare che quelle osservazioni non hanno nessun legame necessario con lo sviluppo teorico della materia, giacchè uno dei pregi più rilevanti di questo libro sta appunto in ciò che « dal sistema di proposizioni geometriche in esso contenute, facendo astrazione dall' intuizione spaziale (vale a dire dal loro significato geometrico) rimane un sistema di verità astratte logicamente ben determinato come nell'aritmetica ».

E già che stiamo parlando dei postulati sarà conveniente fermare un momento l' attenzione su quello delle rette parallele « se due rette sono parallele esse sono figure opposte l' una all' altra rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale », il quale assieme alla definizione « due rette diconsi parallele se una di esse contiene due punti opposti a due punti dell' altra rispetto al punto di mezzo di una loro trasversale comune » permette di porre le prime proprietà delle parallele indipendentemente dalla nozione di piano e di dare perciò la definizione di questa figura come pure quella del fascio di rette e di raggi, definizione che in seguito viene estesa per ottenere la stella di rette e di raggi e lo spazio geometrico; sicchè nel libro che esaminiamo vi è una forma (la retta) che serve a determinare tutte le altre, laddove nei libri che seguono i metodi antichi lo spazio, la retta, il piano sono altrettante forme per ognuna delle quali devesi chiedere l' esistenza all' esperienza e domandarne per via di postulati quelle proprietà fondamentali che col metodo del Veronese possono prendere il posto che loro spetta fra i teoremi.

Oltre ai postulati che abbiamo citato sono date come tali alcune altre proposizioni, le quali però molto opportunamente non sono numerate, ma contraddistinte semplicemente con un asterisco e scritte in corsivo anzichè in grassetto, affinchè l' alunno abbia a tener presente che esse sono dimostrabili mediante i postulati essenziali, e che ne vien tralasciata la dimostrazione soltanto per appianargli la via ch' egli deve percorrere; perciò nessun danno verrebbe all' essenza del libro se l' insegnante per sue vedute speciali o in causa delle condizioni poco floride della sua scolaresca, aggiungesse come postulato non necessario qualche altra delle proposizioni che nel testo trovansi dimostrate.

Importantissima è la definizione dell' eguaglianza delle figure fondata sul fecondo concetto di corrispondenza e tale da abbracciare anche quelle figure cosidette simmetriche le quali seguendo il metodo del movimento debbono essere strappate dal dominio del concetto generale di eguaglianza al quale incontestabilmente appartengono. Di qui la possibilità di schivar di ricorrere un' altra volta all'esperienza per chiedere al mondo fisico la nozione di un fatto la cui presenza non è punto indispensabile nel campo geometrico. Di qui pure la pos-

Digitized by Google

sibilità di eliminare le poco gradite considerazioni sugli angoloidi opposti dei quali è con vera sorpresa che gli alunni si sentono dire dai seguaci degli antichi metodi che non sono eguali, e la semplificazione di tutti i teoremi sull' uguaglianza dei triedri (e in generale di tutte le figure solide) prodotta dalla eliminazione del concetto di orientazione da un campo nel quale esso è affatto estraneo. Di qui ancora la possibilità di rendere più completa la corrispondenza fra la geometria del piano e quella della stella e della sfera in quelle parti che non dipendono dalla teoria delle parallele.

Ed a questo punto torna a proposito l' osservare con quanta evidenza siano nel libro, che abbiamo dinanzi, messe in luce le analogie che anche nel campo della geometria elementare hanno luogo tra le diverse forme fondamentali della medesima specie, e precisamente, stando alle forme di prima specie, tra retta, fascio di raggi, fascio di rette parallele, circonferenza, fascio di semipiani, fascio di piani paralleli, fascio di circoli massimi sulla sfera, per tutte le quali forme (e volendo anche per le superficie conica e cilindrica) si può notare che soddisfano alle condizioni contenute nei postulati che caratterizzano la retta come sistema lineare omogeneo di punti, dopo di che per ognuna di esse è lecito concludere senz' altro che rispetto ai loro elementi hanno luogo quelle proprietà che per la retta discendono da codesti postulati. Ma dove a proposito di paralleli maggiormente si distingue il presente testo è nel § 7 del libro III. dove il confronto tra la geometria della stella e quella del piano è di una sorprendente limpidezza, mettendo bene in rilievo le analogie e le differenze, e facendo vedere come le analogie si presentino non solo nei risultati ma ben anche nel procedimento dimostrativo per cui l'A. può enunciare un discreto numero di proposizioni lasciando la dimostrazione alla cura dell' alunno, il quale non ha che da riprendere le dimostrazioni delle correlative proposizioni di planimetria e farvi quegli scambi di termini che sono indicati al principio del paragrafo. Ed è appunto per prepararsi il terreno a questo parallelo che l'A. ha dovuto nella dimostrazione di alcune proposizioni planimetriche contenute nei §§ 5, 6 del libro II apportare qualche innovazione che a prima vista potrebbe sembrare inutile. Mercè i paralleli ora notati il libro del Veronese viene a rispondere pienamente a quella parte delle istruzioni che accompagnano gli ultimi programmi di matematica per i Ginnasi e Licei, nella quale si raccomanda di mettere in rilievo le analogie che corrono fra enti e teorie diverse.

E ritornando alla definizione di eguaglianza tanto maggiormente apparisce la sua opportunità quando la si confronti con quella di similitudine, cosicchè immediatamente cade sott' occhio il legame che esiste fra la teoria delle figure eguali e quella delle figure simili. Ed è

Digitized by Google

proprio curioso questo fenomeno che mentre da parecchio tempo in altri libri si fa uso del concetto di corrispondenza per trattare della similitudine senza che ciò abbia sollevato mai delle opposizioni, invece ad alcuni faccia quasi orrore il veder applicato lo stesso concetto nello svolgimento della teoria dell' eguaglianza. Noi in cambio di provare simili sgomenti continueremo ad osservare che il modo in cui viene svolta dall'A. la teoria delle figure eguali apporta una benefica influenza anche in quella della similitudine, permettendo di eliminare totalmente l' artificiosa distinzione di figure direttamente e inversamente simili; artificiosa perchè mentre si capisce p. e. la distinzione di figure omotetiche direttamente e inversamente, giacchè l' omotetia considera per natura sua la reciproca posizione di due figure, distinzioni di tal sorta non si comprendono nella teoria delle figure simili, essendo il concetto generale di simiglianza al pari di quello di eguaglianza, affatto indipendente dal concetto di orientazione.

Per quanto riguarda la teoria dei segmenti proporzionali e quella dell' equivalenza, la quale come la teoria della similitudine viene svolta contemporaneamente per le figure piane e per le solide, non si riscontrano nel presente libro sostanziali innovazioni. La teoria delle grandezze proporzionali (§ 2 del libro V) è svolta con sufficiente semplicità e brevità, cosicchè riesce accessibile alla scolaresca una volta che si siano ben chiariti i concetti e dati senza dimostrazione i teoremi del § 1 (grandezze omogenee). Ed a proposito di questo § 1 osserverò che secondo la def. I della pag. 108 risulta che per poter decidere se un dato sistema di grandezze sia lineare omogeneo occorre aver definito che cosa debbasi intendere per somma di due e perciò di più grandezze del sistema, non resta quindi giustificata la successiva def. II. Di più da quanto si trova esposto nel testo anteriormente al libro V risulta la possibilità di porre la corrispondenza di cui si parla nell' anzidetta def. I per il caso delle figure poligonali e poliedriche (pag. 88 e 102), ma non per gli archi, gli angoli ecc., i quali costituiscono parimenti sistemi lineari omogenei di cui pur si parla p. e. nel teor. III della pag. 118. Però, come già osserva l' A. nella nota XXIX dell' « Appendice agli elementi di geometria » (1898), si può dare la definizione del sistema lineare omogeneo indipendentemente dalla retta, e con ciò resta subito eliminato l'accennato inconveniente, giacchè allora le dimostrazioni che nel libro son fatte rappresentando i sistemi lineari di grandezze col sistema dei segmenti (cfr. p. e. teor. IV pag. 111, teor. VI pag. 114) sono senz' altro estensibili a tutte le classi di grandezze geometriche.

Osserviamo ancora che ben a proposito è stata intercalata nel § 4 del libro III una nota in virtù della quale è lasciata libera scelta al-

Digitized by Google

l'insegnante nel trattare delle rette e piani paralleli nello spazio di seguire il metodo comune contenuto nel testo o quello degli elementi all'infinito contenuto nella nota. E degna d'attenzione è pure la nota che chiude il libro III nella quale è svolto con chiarezza e indipendentemente da qualsiasi empirismo l'argomento dei versi delle figure, e vien fatto scaturire il concetto di movimento geometrico da nozioni geometriche.

È pure da notarsi che il libro del Veronese anche per la distribuzione della materia risponde pienamente agli ultimi programmi per i Ginnasi e Licei, come pure si presta meglio che altri a dar corso a quella parte delle istruzioni nella quale si raccomanda che il professore della terza classe liceale richiami brevemente l'attenzione degli alunni sulla natura e sull'ufficio di alcune proposizioni fondamentali e sul nesso delle proposizioni che appartengono ad una medesima teoria.

Nel chiudere questo resoconto mi compiaccio di dichiarare che l'esperienza fatta per parecchi anni mi rende sicuro di poter affermare che il metodo seguito dall'A. non incontra ad esser appreso dai nostri alunni difficoltà maggiori di quelle incontrate dai metodi comuni, e che esso di gran lunga meglio di questi si presta ad educar la mente dei giovani a quell'ampiezza di vedute il cui conseguimento ha da costituire una delle principali mete alle quali deve aspirare l'insegnamento della geometria.

Torino, luglio 1902.

FRANCESCO PALATINI.

Etudes de géométrie analytique non-euclidienne — par M. BARBARIN, professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Bordeaux. Bruxelles, Hayez, 1900, p. 167. — Estratto dal LX volume dei « *Mémoires couronnés et autres Mémoires* » pubblicati dalla R. Accademia del Belgio - 1900.

Dato che la geometria proiettiva è indipendente da qualunque concetto metrico e che le metriche proiettive di Cayley interpretano nello spazio proiettivo completo i sistemi di Lobatschefskij e di Riemann, le proprietà grafiche delle linee e superficie del II.° ordine debbono ritenersi conosciute anche negli spazii non-euclidei. Non altrettanto può dirsi delle loro proprietà metriche: esse forniscono la materia per uno speciale capitolo di geometria non euclidea.

Relativamente alle coniche le prime ricerche d'indole metrica risalgono al Battaglini, allo Story, al D'Ovidio; relativamente alle quadriche al Clifford, al Klein, al Darboux, al Bianchi. La lettera-

Digitized by Google

tura dell' argomento mancava però d' un' opera che, in parte riassumendo e completando le generalità contenute nelle precedenti ricerche ed in parte svolgendo questioni non anche trattate desse un sistematico sviluppo alle proprietà metriche delle linee e superficie di II.° ordine, negli spazii di curvatura costante. L'opera del signor Barbarin, di cui vogliamo dare un rapido cenno, mira appunto a un tale fine.

Essa è divisa in sei capitoli, di cui tre sono ausiliarii.

Il I.° tratta del quadrilatero trirettangolo, che l' A. utilizza per le costruzioni fondamentali sul piano di Lobatschefskij ed in particolar modo per la costruzione approssimata del parametro del piano.

Il secondo cap. è dedicato ai principii di geometrica analitica sul piano. I sistemi di coordinate che l' A. introduce sono il polare, il lineare, il trilineare, ma usa di preferenza le coordinate rettangolari, caso particolare del secondo sistema, le cui variabili x, y, z sono legate dalla relazione

$$\varepsilon (x^2 + y^2) + z^2 \equiv 1,$$

dove $\varepsilon = \pm 1$ a seconda che si tratta del sistema riemanniano o di quello di Lobatschefskij.

Il III.° cap. si riferisce alle linee di second' ordine.

Dopo aver brevemente assegnata l'equazione della tangente, della polare l' A. passa alla determinazione dei centri, degli assi di dette linee ed alla loro classificazione, separatamente considerando i due piani non euclidei.

Sul piano di Riemann si presenta una sola classe di curve, dotate di tre centri, tre assi reali ed appartenenti al genere ellisse.

Sul piano di Lobatschefskij si presentano invece tre classi, caratterizzate la prima da un centro e due assi, la seconda da un asse e dalla mancanza di centro, la terza da un asse ed un centro all' infinito. Le coniche di queste tre classi appartengono poi a varii generi: ai generi ellisse, iperbole, parabola dell' ordinaria metrica ed ai generi *ciclo* ed *oriconica*, che caratterizzano il piano di Lobatschefskij. Al genere ciclo appartengono gli *ipercicli* (linee equidistanti), al genere oriconica gli *oricicli* (curve limiti di Lobatschefkij).

All' accennata classificazione fanno seguito la soluzione di alcuni problemi metrici sulle linee del secondo ordine, un rapido cenno delle loro proprietà grafiche e metriche ed in fine lo studio diretto delle sezioni piane dei coni a mezzo della figura di Dandelin. Nello stesso capitolo troviamo pure considerate le coniche sferiche, orisferiche, ipersferiche e le sezioni piane del canale di rivoluzione (luogo dei punti equidistanti da un asse). Le proprietà delle coniche sferiche,

Digitized by Google

orisferiche, ipersferiche fanno riscontro a quelle delle coniche tracciate rispettivamente sui piani di Riemann, d'Euclide, di Lobatschefskij.

I capitoli IV.°, V.° sono dedicati alla geometria analitica dello spazio e precisamente il IV.° all' introduzione delle coordinate lineari ed alla risoluzione dei problemi fondamentali, il V.° alle quadriche, relativamente alle quali l'A. determina il piano tangente, il piano polare, i centri, i piani principali e considerando separatamente il caso riemanniano ed il caso di Lobatschefskij stabilisce una classificazione delle sup. del secondo ordine.

Nello spazio di Riemann egli trova una sola classe di quadriche e due generi: ellissoide ed iperboloide rigato; in quello di Lobatschefskij invece tre classi ed i generi ellisoide, iperboloide, paraboloide, più il nuovo genere caratteristico: *oriquadrica*, al quale, come caso particolare, appartiene l'*orisfera* o superficie limite. Alla classificazione seguono alcune proprietà dell' ellisoide e la notevole determinazione dei fuochi e sezioni circolari delle quadriche.

Il VI.° ed ultimo capitolo è dedicato allo studio delle superficie tubulari e delle pseudosfere di rotazione.

Le sup. tubulari rientrano nella famiglia delle pseudosfere di rotazione in quanto la loro curva meridiana è una particolare trattrice.

È da questa osservazione che l'A. prende le mosse per lo studio della trattrice non-euclidea, di cui determina i varii tipi e le corrispondenti pseudosfere. In seguito dimostra che le pseudosfere di rotazione sono superficie a curvatura costante e deduce che la geometria sulle superficie canali, in regioni convenientemente limitate, è identica a quella di una regione piana euclidea e che la geometria della psudosfera generica, in regioni limitate di essa, si identifica con quella d'una porzione di piano di Lobatschefskij. Termina poi assegnando la misura del solido limitato dalla pseudosfera di rotazione e da due piani perpendicolari all' asse di rotazione.

Per chi segue i progressi della Geometria non-euclidea il rapido cenno che porgiamo dell' opera del Sig. Barbarin mostra come alcuni risultati fossero noti (ad es. le proprietà grafiche, le focali delle coniche, la geometria sulle superficie tubulari); non di meno, per la loro sistematica trattazione e coordinamento ai risultati originali essi trovano, e con vantaggio, posto negli *Etudes de géométrie analytique non-euclidienne.*

Pavia, Febbraio 1902.

ROBERTO BONOLA.

Digitized by Google

H. G. ZEUTHEN. *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age. Édition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par* JEAN MASCART. Paris, Gauthier-Villars, 1902, 8.°, p. XV+266 [Prezzo 9 fr.].

In due modi differenti si possono intendere le ricerche sulla scienza delle età che furono. Si può, infatti, proporsi di seguire accuratamente, colle opere esistenti alla mano, l'apparire e lo svolgersi delle varie idee direttrici, tenendo conto delle vicende che attraversarono i più eminenti pensatori, nell'intento di scoprire dove essi possono avere trovato lo stimolo o l'ispirazione alle loro indagini, od eventualmente incontrati i germi delle scoperte che ad essi attribuisconsi; è questo il còmpito preciso dello storico nello stretto senso della parola, il quale, nell'adempierlo, arriva a distinguere nettamente le questioni storiche esaurite da quelle che attendono dall'avvenire una soluzione definitiva. Ma si può anche prescindere in gran parte dagli uomini e tessere la storia delle idee, notandone le scaturigini e seguendone il corso, spingendosi poi sino a colmare le lacune esistenti nell'insieme dei materiali esistenti, col ricostruire, quasi divinando, il processo logico che presumibilmente avranno seguito i nostri progenitori scientifici. Il primo di siffatti modi di procedere si accosta (pure restandone a considerevole distanza) a quello seguito dai bibliografi, esige di regola un'erudizione svariata e copiosa, e mena di consueto a conclusioni da nessuno combattute e da molti sfruttate. Il secondo, invece, si può ritenere modellato su quello caratteristico dello scienziato procedente alla ricerca di nuovi veri. Se del primo indirizzo è oggidì maestro insuperato M. Cantor, del secondo il più eminente rappresentante è H. G. Zeuthen, il sommo discepolo di Chasles, del quale i nostri lettori ricorderanno la geniale opera sulle *Sezioni coniche nell'antichità*.

Ed in tale situazione egli si riaffermò nelle *Lezioni* che, pubblicate nel 1893 in danese, ebbero ben tosto (1896) l'onore di una versione tedesca e che ora, tradotte in francese, sembrano destinate a diffondersi nelle biblioteche e nelle scuole italiane; su questa traduzione, che viene ad esaudire un nostro antico desiderio, intendiamo con le presenti linee attirare l'attenzione degli insegnanti e degli studiosi in genere.

Nelle sue *Lezioni sulla storia delle matematiche antiche e medievali* lo Zeuthen si è proposto di esporre quel tanto di storia delle matematiche elementari che, a suo avviso, importa conoscano i professori e gli studenti; cioè, non tanto di far conoscere i più minuti particolari biografici e storici, non già chi per primo abbia scoperto una proposizione od usato un procedimento, ma sibbene le forme pri-

Digitized by Google

mitive sotto cui apparvero le varie verità ed i diversi metodi, nonchè le applicazioni che ne vennero fatte vuoi in origine, vuoi in processo di tempo. Ne risultò un'opera improntata ad indiscutibile originalità e di indole più matematica che storica; infatti essa è, in ultima analisi, uno studio approfondito dei grandi geometri antichi, fatto, meno nell'intento di determinare quello che sapeva un certo scienziato, una certa generazione od un certo popolo, che di porre allo scoperto le intime recondite ragioni per cui i teoremi e le dimostrazioni dovevano, quasi per necessità fatale, presentarsi nella forma in cui li incontriamo. La genialità di tali indagini è di per sè evidente ed il valore dei risultati a cui esse guidarono verrà riconosciuto da tutti, non esclusi coloro che fossero titubanti o recalcitranti ad inserirli nel catalogo dei fatti aquisiti dalla storia delle matematiche. La preponderanza dell'elemento sostanziale sull'elemento storico-cronologico (preponderanza a cui si deve se nelle *Lezioni* dello Zeuthen, ad alcune importantissime questioni non viene accordato tutto lo spazio che meriterebbero) è visibile dalla semplice ispezione dell'*Indice* che qui riferiamo:

Introduzione. — 1. Matematica preistorica - 2. Egiziani e Babilonesi.

Le matematiche greche. — 1. Sguardo storico - 2. Matematica dei Pitagorici - 3. Aritmetica geometrica - 4. Algebra geometrica - 5. Equazioni quadratiche numeriche; estrazione della radice quadrata - 6. L'infinito - 7. La quadratura del circolo - 8. La trisezione dell'angolo; inserzioni - 9. Duplicazione del cubo - 10. Teoremi e problemi; significato e portata della costruzione geometrica - 11. Metodo analitico; forme di esposizione analitica e sintetica - 12. Gli *Elementi;* metodi analitici ausiliari - 13. Sguardo agli *Elementi* di Euclide; sistema sintetico - 14. Ipotesi geometriche di Euclide - 15. Nota sopra le ipotesi della Geometria - 16. La teoria generale delle proporzioni, i libri V e VI di Euclide - 17. Grandezze commensurabili e loro trattamento numerico; i libri VII e IX di Euclide - 18. Grandezze incommensurabili; il libro X di Euclide - 19. Elementi della stereometria; poliedri regolari; i libri XI e XIII di Euclide - 20. Dimostrazioni per esaustione; il libro XII di Euclide - 21. Determinazioni infinitesimali in Archimede - 22. Teoria dell'equilibrio, secondo Archimede - 23. La teoria delle sezioni coniche prima di Apollonio - 24. Le sezioni coniche di Apollonio - 25. Luoghi e problemi solidi - 26. Geometria calcolatrice - 27. Geometria sferica - 28. Decadenza della geometria greca. - 29. Aritmetica greca più recente: Diofanto.

Le matematiche indiane. — 1. Sguardo rapido - 2. Nomi e segni pei numeri; numerazione prima degli Indiani e presso di essi - 3. Usi del calcolo numerico - 4. Algebra e teoria dei numeri; geometria.

Il Medio Evo. — 1. Introduzione generale - 2. L'aritmetica e

Digitized by Google

l'algebra degli Arabi - 3. La trigonometria degli Arabi - 4. Primo risveglio delle matematiche in Europa.

Il lettore dell'opera che annunziamo scorgerà facilmente la singolare abilità posseduta dallo Zeuthen nello scoprire i legami che uniscono ricerche che a prima vista sembrano disgiunte ed apprenderà con vivo soddisfacimento intellettuale le osservazioni ingegnose e brillanti che costituiscono un vero commento storico-critico all'antica geometria, ed in ispecie a gli *Elementi* di Euclide e le *Coniche* di Apollonio. Se non sempre egli sarà messo in grado di misurare l'elemento ipotetico esistente nelle argomentazioni dello Zeuthen, sarà per compenso condotto a penetrare nell'intimo pensiero degli antichi geometri: e le sobrie, ma importanti, note, di cui P. Tannery corredò la traduzione francese, gli forniranno un vital nutrimento bastante a compensarlo dell'ignoranza di certi documenti recentissimi, di cui lo Zeuthen non tenne sufficiente conto.

Malgrado alcune piccole mende, l'opera dello Zeuthen è destinata a ottenere, grazie a questa nuova traduzione, una maggior copia di estimatori e una influenza più vasta; e sarà accolta con vivo piacere da tutti i lettori di essa la notizia, che siamo in grado di dare, che ben presto un nuovo volume verrà a completarla, narrandoci il periodo scientifico che guidò alla scoperta del calcolo infinitesimale. A tessere la storia di questo fortunoso periodo storico lo Zeuthen si è mostrato già mirabilmente preparato mediante alcuni saggi sopra Fermat, Barrow ed i loro contemporanei; onde è certo che il volume venturo non sarà inferiore a quello di cui oggi ci siamo occupati.

G. L.

KARL FRIEDRICH GAUSS. *General Investigations of Curved Surfaces of* 1827 *and* 1825. Translated with notes and a bibliography by James Caddall Morehead and Adam Miller Hiltebeitel. The Princeton University Library, 1902, 4.°, p. VIII + 127. [Prezzo $ 1.75].

In una splendida edizione, di soli 500 esemplari, appare la prima traduzione inglese delle classiche memorie di Gauss sulla teoria delle superficie. La cura ed il lusso dell'edizione fanno sì che la vendita del libro non compenserà che in parte le spese, sopportate dalla Princeton Library Publishing Association e dagli alunni dell'Università, fondatori del *Seminario matematico*.

È un altro fatto che va ad aggiungersi a quelli ogni giorno più numerosi che mostrano come nell'America del Nord la scienza pura sta per essere accolta con tutta quella liberalità che le è condizione necessaria per germogliare e fiorire.

Digitized by Google

Non è oramai difficile profezia il prevedere che nel secolo XX è destinato agli Stati Uniti un posto per lo meno eguale, se non superiore a quello che nella storia della matematica hanno occupato finora le nazioni d'Europa. E tanto più facile è questa previsione quando si pensi alla cura con cui gli americani stanno ponendo le solide basi su cui si sviluppa la loro produzione scientifica, colla creazione cioè di meravigliose biblioteche, di Università grandiose, e sopratutto col continuo lavorio per risalire alle fonti del progresso scientifico odierno.

È un volgare pregiudizio, pur troppo ancora diffuso, che la matematica, a differenza delle altre scienze, non abbia classici. Si dice spesso che gli ultimi trattati usciti completano e collegano tutte le verità contenute negli autori antichi; se ne trascura quindi dai più lo studio, giudicandolo una oziosa curiosità di bibliofili o di bibliomani.

Eppure se vi è una scienza in cui gli autori antichi *non invecchiano*, questa è proprio la matematica. Le opere dei classici, da Euclide, Archimede fino a Newton, Eulero, Gauss sono monumenti artistici di così compiuta bellezza che ogni rimaneggiamento, ogni perfezionamento è spesso una profanazione ed un peggioramento.

Il continuo, assiduo contatto coi classici è condizione necessaria alla creazione di nuovi capolavori non solo, ma anche l'unica guida sicura di chi voglia addentrarsi con qualche frutto nelle più elevate regioni della scienza. Ed il giudizio di G. Darboux, riportato nell'introduzione, scritta dal signor H. D. Thompson, che cioè lo studio di questa memoria di Gauss è la più completa ed utile introduzione allo studio della geometria infinitesimale, può generalmente ripetersi per le altre parti delle scienze matematiche.

Ecco ora alcune notizie relative all'edizione. I traduttori hanno cercato nella forma e nella punteggiatura delle formole di staccarsi dalle edizioni originali. Hanno però adottato la notazione $\cos^2\varphi$ invece di quella di Gauss $\cos\varphi^2$. È utile notare che le due notazioni sono egualmente diffuse al giorno d'oggi e che di più la prima è stata con ragione criticata da molti, e dallo stesso Gauss. Egli (Werke, t. 4, p. 361) approvando la stessa opinione sostenuta da Herschel (Phil. Trans. 1813) dice che ciò che egli « *über die Bezeichnung* $\cos^2 A$ *sagt,* « *welches einige neuere mathematische Schriftsteller für das Quadrat* « *von* $\cos A$, *ganz gegen alle Analogien gebrauchen, da es dieser* « *zufolge den Cosinus eines Bogens* $= \cos A$ *bedeuten sollte, hat* « *ganz unsern Beifall* ».

Un'analoga osservazione si può fare per la sostituzione del simbolo ∂ al simbolo d di Gauss, per indicare le derivate parziali.

Anche questa notazione, come la precedente, sebbene recente, non ha ancora ricevuto l'unanime consenso degli studiosi. Anzi è stata oggetto di recentissime e fondate critiche. (Si veda per es. Form. de

Digitized by Google

Math. publ. par G. PEANO, Turin 1902, pag. 169; POINCARÉ, La notat. différ. Enseignement Mathématique, 1899, t. 1, p. 108).

Sembra quindi conveniente nel pubblicare le opere dei classici rispettare rigorosamente le loro notazioni. Di un difetto dello stesso genere pecca l'edizione francese delle opere di Lagrange: i suoi editori hanno scritto $f(x)$ dovunque Lagrange scriveva fx. La notazione di Lagrange, di Eulero è molto più razionale della *moderna* (perchè per essere coerenti, se si vuol scrivere $f(x)$ converrebbe poi scrivere anche $f((x+h))....$): e la nuova notazione non è neppure sempre osservata. Così nessuno scrive $\sin(x)$, $\cos(x)$, ma tutti, $\sin x$, $\cos x$, e secondo le opportune osservazioni di Weierstrass, si indica un valore della sua funzione con px, e non con $p(x)$.

Le note di cui l'edizione è corredata sono diligentissime: gli editori oltre ad aver profittato di tutte quelle dell'edizione tedesca del Wangerin ne hanno aggiunte molte originali, corredandole con figure che facilitano l'interpretazione delle formole.

La bibliografia che chiude il volume contiene 343 titoli. Gli autori hanno inteso limitarla alle opere ed alle memorie in cui si adoperano i metodi di Gauss e che trattano in generale od in particolare i soggetti seguenti: coordinate curvilinee, linee geodetiche ed isometriche, curvatura delle superficie, deformazione delle superficie, sistemi ortogonali, e la teoria generale delle superficie. Molti lavori che escono da questi limiti sono stati aggiunti a causa della loro importanza e del loro interesse storico.

L'elenco è accurato: noto soltanto un « Briochi » per « Brioschi » a pag. 118.

Mi sembra però che vi siano lacune notevoli. Cito ad esempio:

CESÀRO. *Lezioni di geometria intrinseca*, Napoli 1896.

HAMILTON. *Elements of Quaternions*, di cui è uscita recentemente la seconda edizione inglese.

BURALI-FORTI. *L'introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, Paris 1897.

Cito questi autori a preferenza di altri perchè mi sembra che i loro metodi siano proprio un naturale proseguimento di quelli di Gauss, tanto che si è potuto recentemente dubitare che forse a Gauss stesso si debbano le prime idee del calcolo geometrico.

Termino rilevando come la ricchezza della bibliografia qui data, finisca per essere di poco giovamento agli studiosi, sopratutto ai giovani: sarebbe forse desiderabile con opportune indicazioni richiamare l'attenzione sui lavori più importanti, e con qualche nota dare un'idea del contenuto dei rimanenti.

Torino, 4 Luglio 1902.

G. VACCA.

Digitized by Google

W. B. FRANKLAND. *The story of Euclid. With Illustrations.* London, Newnes 1902, 16.°, p. 176 [Prezzo del Vol. legato 1 scellino].

In un paese, come l'Inghilterra, in cui l'insegnamento geometrico, malgrado accaniti oppositori, ha sempre un'impronta spiccatamente euclidea è a credersi che un libro che porti il titolo di « storia di Euclide » racchiuda in realtà una « storia della geometria elementare ». E tale è infatti il contenuto del nuovo volume che annunciamo della collezione intitolato *The Librairy of useful Stories.* Per dare una idea del piano di esso, nulla di meglio che il riferirne qui i titoli dei singoli suoi capitoli, accompagnati da brevi spiegazioni.

I. *Introduzione.*
II. *La geometria dalla nascita alla sua giovinezza* (cioè sguardo alla geometria pre-euclidea).
III. *Il padre della geometria* (Talete).
IV. *Il maestro e la confraternita* (Pitagora e la sua Scuola).
V. *Geometri illustri* (Ippocrate, Archita, Platone, Eudosso).
VI. *Euclide l'immortale.*
VII. *La forma degli « Elementi ».*
VIII. *La sostanza degli « Elementi ».*
IX. *Il sommo geometra* (Archimede).
X. *I tre eterni problemi* (Quadratura del cerchio, Problema di Delo, Trisezione dell'angolo).
XI. *L'ultimo dei Greci* (Proclo).
XII. *Le età oscure* (Medio Evo).
XIII. *Le più antiche edizioni di Euclide.*
XIV. *La novella aurora* (1600-1800).
XV-XVI. *Un secolo di luce* (Gauss, Lobatschewsky, Bolyai, Riemann).

L'A. ha attinto alle migliori fonti; perciò le informazioni che egli porge sono in generale degnissime di fede; egli poi si è sforzato di presentarle sotto la forma più attraente e vi è riuscito; e l'editore lo ha secondato col dare al volumetto in discorso l'aspetto più seducente. Onde il modesto lavoro da lui compiuto congiunge l'utile al dilettevole, e sarebbe da augurarsi che in Italia, ove pure Euclide domina sempre come sovrano, ne possedesse uno analogo; è questo il migliore elogio che se ne possa fare. G. L.

PIETRO RIGOBON. *Studi antichi e moderni intorno alla tecnica dei commerci.* Bari, tip. Avellino, 1902, 8.°, p. 38.

È il discorso inaugurale dell'anno accademico 1901-1902 della Scuola Superiore di Commercio di Bari. Credo utile richiamare l'attenzione degli studiosi della storia delle matematiche su questo opuscolo,

Digitized by Google

trattando esso un argomento generalmente poco curato, l'applicazione della matematica al commercio.

L'aritmetica mercantile è una scienza in gran parte italiana. Nel *Liber abaci* di Leonardo Pisano si trovano già trattate interessanti questioni di cambi: ma è sopratutto ai due grandi italiani Luca Paciolo e Nicolò Tartaglia che si deve l'applicazione sistematica dell'aritmetica al commercio.

Ed attorno a questi grandi il prof. Rigobon ci fa conoscere una folla di umili lavoratori sconosciuti o quasi nella storia delle matematiche (alcuni forse a torto), ma benemeriti per l'influenza da essi esercitata sui loro contemporanei.

Lo scritto del prof. Rigobon appare quindi una nuova fonte da cui sarà forse possibile attingere notizie che oggi possono interessarci maggiormente quando si ponga mente alle moderne tendenze della matematica pura, poichè essa, dopo un periodo di allontanamento, sembra senta il vivo desiderio di avvicinarsi alle applicazioni alla industria ed al commercio, per poter poi assurgere a nuove e più elevate speculazioni.

E che questo nuovo contatto debba essere fecondo non potrà dubitare chi pensi quanti incoraggiamenti i mercanti fiorentini e veneti abbiano dato ai nostri matematici del secolo XV, e a chi osservi che i primi inizi della matematica inglese sono segnati degnamente dai libri di Recorde, il quale per molti secoli ebbe fama e fu studiato e diffuso dai negozianti inglesi.

G. Vacca.

J. Molk et J. Tannery. *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.* T. IV. *Calcul intégral* (II *Partie*). *Applications.* Paris, Gauthier-Villars, 1902, 8.°, p. IX + 303 [Prezzo 9 fr.].

Riferendoci per quanto concerne la disposizione della materia ed il metodo seguito in quest'opera a quanto scrivemmo quando ne apparve il III vol. (v. *Bollettino*, II, 1899, p. 100-101), indicheremo che cosa contenga l'ultima parte di essa.

Nella prima metà di essa gli autori esauriscono lo studio dell'« inversione », trattando a fondo e con molti particolari degli integrali della forma $\int \frac{dz}{f(z)}$, f essendo una funzione biquadratica di z; come epilogo di questa parte, anzi di tutta la sezione che si riferisce al calcolo integrale, si trova l'elenco completo delle formole stabilite, elenco che, assieme a quello concernente il calcolo differenziale posto in fine del II vol., costituisce un ottimo *vade-mecum* per chiunque intenda servirsi delle trascendenti ellittiche. (Sarebbe forse

Digitized by Google

stato miglior consiglio il riunirne le due sezioni per costituirne un volumetto a parte, di più facile consultazione).

Nell' altra metà sono segnalate le più semplici applicazioni geometriche e meccaniche, aritmetiche ed algebriche che sinora trovarono le funzioni di cui si tratta: rettificazione dell'ellisse e della lemniscata, area dell' ellissoide, pendolo semplice e sferico, movimento d'un solido attorno ad un punto fisso, divisione dei periodi, trasformazione delle funzioni ellittiche, moltiplicazione complessa.

Seguono alcune note su certi punti speciali e finalmente un' importantissima lettera scritta dall' Hermite a J. Tannery il 24 Settembre 1900, ove è esposta l'unica dimostrazione che abbia data l'illustre geometra di alcune formole da lui enunciate nel 1858 nella sua memoria *Sur l'équation du cinquième degré*. Gli egregi autori non potevano trovare chiusa più degna all' eccellente opera di cui hanno arricchito la letteratura matematica contemporanea.

G. L.

M. DE MONTCHEUIL. *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Toulouse pour obtenir le degré de Docteur-ès-Sciences mathématiques.* 1re Thèse: Sur une classe de surfaces. - 2.e Thèse: Propositions données par la Faculté. -- Paris, Gauthier-Villars, 1902. 4.0, p. 79.

Le superficie studiate in questo lavoro sono definite analiticamente dall' essere integrali dell' equazione a derivate parziali

$$\frac{d^4\,\xi}{du^3 \cdot du_1^3} = 0,$$

ove ξ, u_1 u_1 sono le note coordinate di Bonnet (cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. I, p. 243). Fra tali superficie se ne trovano di note; ad es.: le superficie d' area minima, le superficie a sviluppata media piana, le superficie rigate immaginarie di Monge e in particolare le rigate di Serret. Appunto questa circostanza ha condotto l' autore a scoprire una generazione comune e delle proprietà, che negli indicati casi speciali rientra in proposizioni conosciute. L' alternarsi continuo nel presente scritto di considerazioni geometriche e di applicazioni della teoria delle equazioni a derivate parziali rivela l' autore per un tardo discepolo di Monge e fornisce una nuova prova del continuarsi in Francia, grazie specialmente alla grande opera del Darboux, delle tradizioni scientifiche che hanno le loro scaturigini nell'*Application de l'analyse à la Géométrie.*

G. L.

Digitized by Google

A. CAPELLI. *Elementi di aritmetica ragionata e di algebra ad uso dell' istruzione secondaria.* Napoli, B. Pellerano, 1902, 8.°, p. XI+112 [Prezzo L. 1,80].

L' illustre Professore dell' Università di Napoli dà egli stesso con poche parole di prefazione le ragioni della pubblicazione, nella quale ha esposti ed ordinati per uso didattico i risultati degli studi fatti sui fondamenti dell'aritmetica e comunicati alla R. Accademia delle Scienze di Napoli (16 giugno 1900). Egli scrive: « Le ragioni che mi hanno indotto a presentare ai pubblico questo primo saggio di un trattato di aritmetica razionale e di algebra elementare ad uso dell' istruzione secondaria, possono facilmente rintracciarsi nelle mie recentissime pubblicazioni: *Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica* e *Sulla genesi combinatoria dell'aritmetica* » (Giornale di Matematiche, Vol. XXXIX, 1901). Perciò più che al libro di testo darò un rapido sguardo alle due note ricordate.

In questi ultimi anni molto si è fatto per stabilire in modo rigoroso e generale i fondamenti della matematica: ma l' opera dei più dotti scienziati (e dico *dei più dotti*, perchè gli studi necessari a così alto compito richiedono cognizioni assai vaste nel campo matematico e forte ingegno) fu necessariamente rivolta all' analisi infinitesimale, alla geometria proiettiva ed elementare; ben di rado all' aritmetica, ove si eccettui quella parte che è intimamente legata ai concetti di limite e di infinitesimo. E poichè ben poco, bisogna pur dirlo, si è fatto nel campo dell'aritmetica primitiva, dirò così, cioè delle operazioni fondamentali, ha fatto bene, molto bene l' illustre Professore a darci uno studio accurato e nuovo sui fondamenti di essa ed a mostrarne le applicazioni allo svolgimento dei programmi di aritmetica razionale, perchè era ed è vivamente sentito il bisogno di fondamenti rigorosi anche nell' aritmetica pratica, tanto importante, benchè elementare, maltrattata in molte scuole e da molti insegnanti e purtroppo dimenticata fino ad ora, così che per sola consuetudine, quasi passivamente e senza discussione, si sono accettati quei principî direttivi che la tradizione ha imposto.

Dall' esame di numerosi trattati di aritmetica pratica e razionale, per non dire di tutti, l' ordine seguito nel trattare le operazioni fondamentali è: *addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione,* che viene spesso sostituito dall'altro: *addizione, moltiplicazione, divisione e sottrazione,* quando si tratti di aritmetica razionale e di algebra, od anche, un po' più raramente, *addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione,* quando alla introduzione dei numeri frazionari si faccia precedere quella dei numeri negativi. Il Prof. Capelli si è posto perciò la questione: è necessario che il primo posto sia dato all' addizione?

Digitized by Google

È possibile che esso venga assegnato alla moltiplicazione, benchè nessun trattatista abbia finora adottato l'ordine che ne deriva? Tale questione è risolta appunto nel 2.° paragrafo della prima memoria.

Scegliendo quale criterio direttivo nello studio della questione l'ampliamento apportato nel campo dei numeri da ogni operazione, come conseguenza necessaria della sua stessa introduzione, ed esaminando unicamente dal lato scientifico gli ordinamenti possibili, i tre *vecchi* ed i tre *nuovi:*

moltiplicazione	moltiplicazione	moltiplicazione
divisione	addizione	addizione
addizione	divisione	sottrazione
sottrazione	sottrazione	divisione

l'A. viene ad escludere in via assoluta i tre primi, dando la preferenza al 3.° dei tre nuovi, che chiama *ordinamento algebrico* ed esponendo quali vantaggi, dal punto di vista didattico, l'ordinamento preferito abbia sugli altri fino ad ora usati nell'aritmetica.

Lo studio del chiaro Professore può dirsi il trionfo della matematica combinatoria che, quasi dimenticata per tanto tempo, risorge ora e sempre più a vita rigogliosa, specialmente nell'alta algebra e in molte parti dell'analisi più elevata. Infatti il nuovo indirizzo che ne deriva per lo studio dell'aritmetica, sia sistematico, sia didattico, ha per fondamento la precedenza della moltiplicazione sull'addizione, dovuta principalmente alla definizione puramente combinatoria della moltiplicazione, per cui essa è affatto indipendente da quella di addizione; con ciò si evitano l'inconveniente di quella specie di discontinuità di metodo che si ha tra l'esposizione dell'aritmetica e quella dell'algebra e la maggior difficoltà che gli allievi incontrano nei vari problemi combinatori, non avendo avuto la necessaria preparazione iniziale e graduale.

Perciò il Capelli ha dimostrato nella seconda memoria, e molto meglio negli *Elementi*, nei quali ha potuto dare ai suoi concetti maggiore estensione di esposizione e di applicazione, che non s'incontrano difficoltà a trattare le teorie fondamentali dell'aritmetica secondo la genesi combinatoria e dando la preferenza alla moltiplicazione.

Mentre consento coll'egregio A. che ciò possa convenire, con sensibile vantaggio, per l'aritmetica razionale, mi permetta di affermare che giudico questo metodo nè opportuno, nè consigliabile nell'insegnamento dell'aritmetica pratica, sul che egli stesso in buona parte conviene.

Da quanto precede si comprende come gli *Elementi* pubblicati siano densi di novità e di rigore, così che ne risulta gradito lo studio; ben pochi appunti vi si potrebbero fare ed anche di importanza minima.

Digitized by Google

Molto opportuni e veramente geniali sono gli esercizi di applicazione alla geometria; buone le innovazioni nella terminologia (numero naturale, enumerare, dividente, ecc.); eleganti le risoluzioni delle equazioni: $ax=by+c$ e $ax=by+c$ (pag. 91-96) col metodo del massimo divisore comune, e della equazione pitagorica: $x^2+y^2=z^2$, per la quale l'A. dà i tipi dei sistemi di numeri x, y e z, primi tra loro, che la soddisfanno (pag. 109-111).

U. CERETTI

Höhere Analysis für Ingenieure von J. PERRY, *autorisirte deutsche Bearbeitung von* R. FRICKE *und* F. SÜCHTING. — Leipzig und Berlin, Teubner, 1902. X-423, p. 8.° [legato M. 12].

Che cosa sia questo libro, è difficilissimo dirlo. Non è un'esposizione teorica del Calcolo infinitesimale, perchè vi mancano l'ordine ed il rigore, — non una raccolta di esercizi, perchè vi è trattata anche la teoria, — meno ancora un corso di applicazioni del Calcolo alla scienza dell'ingegnere. Altrettanto difficile è dire a quale classe di lettori il libro sia destinato: non ai principianti, perchè alcuni punti fondamentali del Calcolo vi sono appena adombrati, — non ai provetti, perchè teoremi tra i più semplici vi si trovano dimostrati esattamente. Malgrado questa indecisione di contorni e di scopo, il libro presenta una lettura delle più attraenti, e chi specialmente non è nuovo allo studio del Calcolo prova un vero e grande diletto nello scorrerne le pagine. Forse ciò è dovuto, oltre che alla disposizione originale della materia, al tono che assume l'autore, pur troppo raro nei libri di scienza, tutto confidenziale e discorsivo. Non è un maestro grave e solenne che abbiamo dinanzi a noi, il quale ci si imponga colla sua autorità; è un amico che, mentre, conversando con noi, ci istruisce sui più vari soggetti, ci dà tratto tratto consigli pratici ed utili suggerimenti, e non crede di abbassarsi entrando in particolari che taluno giudicherebbe - a torto - futili, come quando ci raccomanda di esercitarci nei calcoli approssimati e nell'uso delle tavole logaritmiche, o quando insiste sull'importanza di abituarci a vedere le stesse formole scritte con lettere differenti. Un insegnamento fatto a questo modo non può mancare di riuscire proficuo; e noi vorremmo che tutti quei tecnici, i quali, pure avendo forzatamente abbandonato gli studi teorici, non professano per essi un olimpico disprezzo, leggessero e studiassero questo libro, dove sono trattate tutte le principali applicazioni dell'analisi all'ingegneria.

Un'opera così ricca di materiale non può evidentemente riassumersi in poche linee: e noi ci limiteremo, a questo riguardo, a dire che l'autore ha preso come criterio ordinatore non già la *materia* ma

Digitized by Google

l'*istrumento*, sicchè il primo capitolo contiene tutti i problemi che si riducono alla derivazione od alla integrazione di x^n, il secondo tutti quelli che dipendono da e^x o da sen x, il terzo ed ultimo quelli di natura meno semplice. I teoremi fondamentali del Calcolo compaiono qua e là, a seconda dell'occasione.

Ora — e questo ci riconduce all'osservazione fatta in principio — perchè insistere su tali teoremi? E sopra tutto, perchè darne le dimostrazioni? Chi non conosce il Calcolo non può apprenderlo in questo libro, su ciò sono d'accordo l'autore ed i traduttori; per chi lo conosce è più che sufficiente un semplice accenno agli enunciati. Ma v'ha di più; tutte le dimostrazioni sono fatte *all'antica*, cioè prive completamente di rigore. A giustificazione di ciò i traduttori dicono che nelle scuole politecniche l'insegnante può usare dimostrazioni non rigorose, purchè egli sappia che sono tali e sia in grado di dimostrare rigorosamente, per conto proprio, le sue asserzioni. Noi crediamo — e l'abbiamo ripetuto a sazietà in queste pagine (1) — che nulla sia più antiscientifico ed antididattico del presentare per generalmente vero ciò che lo è soltanto sotto certe condizioni, e che nessuna ragione di opportunità possa giustificare un tale peccato di lesa logica (2). Si limiti, se si vuole, per i tecnici lo svolgimento del Calcolo a quelle sole funzioni che presentano un interesse pratico, ciò che permetterà di adottare le dimostrazioni semplici dei vecchi trattati; ma sappiano gli allievi che quanto loro s'insegna cessa di valere quando non siano soddisfatte determinate condizioni. Nel libro di cui parliamo non solo ciò non è detto, ma par quasi l'autore si sforzi di sradicare dalla mente di chi legge anche il più lontano dubbio sulla validità incondizionata delle cose esposte. Così a p. 45 è scritto che *sempre* (in corsivo) l'ordine delle derivazioni è invertibile; a p. 166 ritorna il *sempre*, e questa volta in carattere grassetto, a proposito

(1) V. per es. *Boll.* 1898, pag. 99; 1902, p. 25.

(2) Vogliamo qui riferire alcune parole di J. Tannery (*Bull. des Sc. Math.* 1899, p. 8), che parebbero scritte pel caso attuale: « Il n'y a pas d'inconvénient à « donner à ces derniers » (agli studenti) « un enseignement incomplet, à leur « exposer une démonstration qui n'est pas rigoureuse, du moment qu'ils sont « avertis. C'est souvent le seul moyen de leur donner un instrument dont ils ont « besoin et dont ils peuvent se servir sans le connaître parfaitement. Si l'on « excite ainsi leur curiosité et leur désir d'en savoir davantage, c'est tout bénéfice. Le meilleur enseignement est, à coup sûr, celui qui éclaircit tout, mais « le pire est pour certes celui qui masque les difficultés et les imperfections des « démonstrations, puisqu'il risque de fausser, non seulement l'intelligence de « l'étudiant, mais le jugement même que ce dernier porte sur sa propre intelligence; s'il croit avoir parfaitement compris une démonstration incomplète, « l'étudiant aura de sa valeur intellectuelle une opinion exagérée; pour celui « qui est vraiment intelligent et qui éprouvera, devant cette même démonstration, un trouble qu'il ne parvient à dissiper ni à s'expliquer, il en résulte « une dépression tout aussi fâcheuse ».

Digitized by Google

dell' esistenza dell' integrale d' un' equazione differenziale del primo ordine; a p. 164 il paragrafo in cui è stabilita l' espressione del differenziale totale porta il titolo di *dimostrazione generale*. E gli esempi potrebbero moltiplicarsi. Ora un errore è tanto più pericoloso, quanto più autorevole è la voce che lo bandisce; e appunto per la grande fiducia che ispira il nostro autore, anzi per la seduzione che egli esercita, chi legge è portato naturalmente ad accettare senza discussione per vere cose che non lo sono, e — ciò che è più grave — a prendere per sillogismi considerazioni mancanti di rigore logico.

Sarebbe pertanto a desiderarsi che un libro come questo, il quale insegna tante cose buone ed utili, non le intercalasse con nozioni false od inesatte. Questo potrebbe ottenersi con lievi mutamenti; basterebbe cioè sopprimere tutte le dimostrazioni dei teoremi di Calcolo, mantenendo soltanto un semplice accenno degli enunciati. Con ciò si raggiungerebbe anche un altro vantaggio: il libro acquisterebbe un carattere più uniforme e deciso, e resterebbe esclusivamente destinato — come non può non esserlo, di fatto, anche ora — a coloro che, avendo appreso il Calcolo infinitesimale, desiderano famigliarizzarsi colle sue applicazioni tecniche.

Se i traduttori, i quali si mostrano sinceramente convinti della necessità di una buona cultura teorica per l' ingegnere, adottassero una tale modificazione in un' edizione prossima, noi ci riterremo abbastanza compensati dell' ingrato ufficio assunto, di criticare un libro di valore riconosciuto, quale è quello che ci sta dinanzi.

G. VIVANTI.

E. BARDEY. *Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von* F. PIETZKER. Leipzig, Teubner 1902. 8.°, p. XIII + 420 [Prezzo del Vol. legato Mk. 8].

Questa quinta edizione, che segue la prima a trentaquattr' anni di distanza, dimostra che nemmeno la morte dell' autore fece cessare il successo ben meritato che essa trovò in Germania tra professori e studenti. Chi scrive queste linee, che conosce il libro del Bardey sin da quando era studente delle scuole secondarie e che ricorda per quanto tempo esso (nella seconda edizione) rimase quale consigliere ed aiuto sul suo tavolo di lavoro, non può non lamentare che in Italia ben pochi la conoscano e l' apprezzino. Eppure nessun' altra opera può al pari di questa addestrare nella difficile arte (in cui è sommo maestro Diofanto) di trasformare e combinare le equazioni algebriche per risolverle colle sole nozioni offerte dall' analisi determinata di 1.° e 2.° grado. Una collezione di problemi sfugge ad un' analisi minuta e

Digitized by Google

non ammette un riassunto; onde a noi è forza limitarci ad indicarne schematicamente il contenuto e l'ordinamento:

I. *Equazioni ad un' incognita.* — A. Equazioni quadratiche pure - B. Equazioni quadratiche miste di forma semplice - C. Equazioni di grado superiore (specialmente del 3.°), aventi ciascuna una radice agevolmente percepibile - D. Equazioni quadratiche più complicate, in particolare della forma $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$: equazioni di significato geometrico, ecc. - E. Equazioni del 4.° grado, che si possono risolvere mediante equazioni del 2°.

II. *Equazioni a due incognite.* — A. Equazioni omogenee semplici - B. Equazioni omogenee più complicate - C. Equazioni di forma speciale.

III. *Equazioni a tre e quattro incognite.* — A. Equazioni a tre incognite - B. Equazioni a quattro incognite.

Noteremo, finendo, che il sig. Pietzker, nel preparare, per incarico dell'editore, questa nuova edizione, lasciò intatto il piano generale dell'opera del Bardey, limitandosi a farvi qualche ritocco.

G. L.

P. Pizzetti. — *Lezioni sulla teoria meccanica della figura dei pianeti.* R. Università di Pisa. Anno 1901-1902, litogr. 8.°, p. 326+23 (Pisa, Spoerri).

Cap. I. Brevi preliminari sulla attrazione e sulla funzione potenziale di spazio.

Cap. II. Funzione potenziale di una sfera omogenea - Discontinuità delle derivate 2.e - Funzione potenziale di uno strato ellisoidico omotetico e di un solido ellisoidico omogeneo.

Cap. III. Definizione e proprietà delle superficie di equilibrio per un pianeta - La gravità.

Cap. IV. L'ellisoide come superficie di equilibrio di una massa fluida omogenea rotante.

Cap. V. Relazioni fra la forma di una superficie di equilibrio e il modo di variare della gravità; ricerche indipendenti da qualsiasi ipotesi sul modo di distribuzione della massa nell'interno - Ipotesi ellisoidica.

Cap. VI. Digressione intorno alle funzioni sferiche.

Cap. VII. Altre ricerche indipendenti da speciali ipotesi sul modo di distribuzione della massa nell'interno del pianeta - Formula di Stokes per le deviazioni del Geoide dall'Ellisoide.

Cap. VIII. Pianeti fluidi eterogenei - Caso in cui le superficie di egual densità sono ellisoidi poco differenti dalla sfera.

Cap. IX. Anello di Saturno.

Appendice. Cenni sulla determinazione di alcune costanti astronomiche.

Digitized by Google

NECROLOGIO

Emanuele Lazzaro Fuchs

Un nuovo lutto colpì di recente la scienza matematica in generale ed in ispecie l'Università di Berlino con la improvvisa e deplorata scomparsa di E. L. Fuchs.

Nato a Moschin, in Posnania, il 5 Maggio 1833, quattordicenne abbandonò la casa paterna per frequentare il Ginnasio-Liceo Federico-Guglielmo di Posen; e, mentre si dedicava con ardore ed ottimo successo agli studi, attendeva all'insegnamento privato, onde soccorrere i propri genitori: questa circostanza merita di essere rilevata perchè debbonsi ad essa le relazioni tra il Fuchs e la famiglia di Leo Königsberger, che è forse il più illustre dei discepoli diretti del compianto estinto.

In casa Königsberger il Fuchs rimase, in qualità di insegnante anche durante l'anno seguente il termine de' suoi studi secondari; e soltanto nell'anno 1854 si trasportò a Berlino per ascoltare le lezioni del Dirichlet, del Borchardt e poi del Weierstrass. Nel 1858 conseguì ivi il gradò di dottore, in seguito alla presentazione di un lavoro sopra un tema posto a concorso da quella Facoltà filosofica.

Tacendo di alcuni posti secondari che egli occupò nell'insegnamento, ricorderemo avere egli insegnato nella « Friedrich-Werderschen Gewerbeschule »; ed è appunto nel « Programm » pubblicato nel 1865 da questo istituto che vide la luce la memoria *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten*, che prima valse a fissare sul Fuchs gli sguardi del mondo scientifico.

Nello stesso anno 1865 l'Università di Berlino gli conferì la libera docenza; quattro anni appresso fu chiamato a Greifswald in qualità di professore ordinario di quella Università, di dove passò poi successivamente nel 1874 a Gottinga, nel 1875 a Heidelberg e finalmente nel 1884 a Berlino, ove rimase sino al termine dell'operosa sua vita (26 Aprile 1902). Il Fuchs fu anche decano della Facoltà filosofica di Berlino e, dalla morte del Kronecker, dirigeva il giornale fondato da Crelle. Delle sue eminenti qualità didattiche sono testimoni viventi i molti egregi matematici che lo ebbero a maestro. Quanto alla sua attività scientifica, essa non si spense e nemmeno illanguidì con gli

Digitized by Google

anni; basta a provarlo il fatto che di una sua importante memoria (*Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten*) egli correggeva le bozze alla vigilia della sua morte (1).

Nella storia delle matematiche E. L. Fuchs occupa una posizione eminente per la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili della quale egli può dirsi il fondatore; per tal modo egli *arricchì di una nuova provincia il regno delle matematiche* (2); prerogativa questa che egli divide con pochi spiriti eletti.

G. L.

NOTIZIE

Alcune ricerche inedite di G. Bolyai, concernenti la geometria non-euclidea e recanti nuova luce sulla storia di questa disciplina, vennero di recente scoperte da P. Stäckel, continuando (cfr. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 143) le sue investigazioni sui manoscritti del celebre geometra ungherese.

Ne danno notizia due importanti lavori inseriti dallo Stäckel medesimo nel Vol. XVIII dei *Mathem. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn*. Nell'uno sono adunate le osservazioni fatte dal Bolyai sopra le *Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* del Lobatschewsky; è inutile spendere parole per rilevarne l'alto interesse storico. L'altro invece (di valore scientifico maggiore) contiene una lucida esposizione degli studi del Bolyai sulla risoluzione del tetraedro in uno spazio non-euclideo.

* * *

Il IV vol. del « Poggendorff ». — Il Prof. A. J. von Oettingen, che con tanta cura ha collaborato al III vol. del celebre *Biographisch-litterarisches Handwörterbuch der exacten Wissenschaften* del Poggendorff (3) e che aveva promesso di occuparsi della redazione di un ultimo volume di quest'opera (dedicato agli anni che corrono dal 1883 al giorno d'oggi), ha già cominciato a mantenere l'impegno preso. L'editore A. Barth di Lipsia ha, infatti, già pubblicaii tre fascicoli di quel volume, comprendenti le lettere A-B e qualche nome relativo

(1) Essa venne poi pubblicata per cura del figlio dell'estinto e di L. Schlesinger nel T. CXXIV del *Journal für die reine und angew. Mathematik*.

(2) Ciò venne altamente proclamato in occasione dell'accoglimento del Fuchs nell'Accademia di Berlino.

(3) Cfr. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 22-23.

Digitized by Google

al C, redatti con i criterî ed i metodi costantemente tenuti nei volumi precedenti. Raccomandiamo ai nostri lettori di esaminarli attentamente, non solo in vista degli insegnamenti che ne riceveranno, ma anche per potere eventualmente collaborare all'*appendice*, che chiuderà tutta l'opera, ed in cui troveranno posto i dati che non vennero utilizzati nel testo e le correzioni alle inevitabili inesattezze commesse.

* * *

Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Il XII Fascicolo delle *Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften* contiene la prima metà di un lungo lavoro di M. Curtze, intitolato: *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.* Essa consta di due parti. Una è riempita dalla versione latina del *Liber embadorum* del Savasorda, colla pubblicazione della quale il Curtze a ragione spera di assicurare al Savasorda (anteriore di un secolo a Leonardo Pisano e Giordano Nemorario) il posto onorifico che gli spetta nella storia delle matematiche. L'altra parte è formata dal carteggio del Regiomontano con Giovanni Bianchini, Jacopo da Spira e Cristiano Roder, carteggio che sembra essere interessante per lo storico della trigonometria; notiamo che dei due primi corrispondenti del Regiomontino (vissuti entrambi in Italia, uno alla corte di Ferrara e l'altro a quella di Urbino) non sono note le date estreme dell'esistenza; sarebbe utile che qualche erudito ne facesse ricerca. — La nuova importante pubblicazione del Curtze è dedicata a M. Cantor in occasione del 50.° anniversario della sua laurea dottorale.

* * *

Errori di un grande. — Poichè la *Théorie des nombres* di Legendre è tuttora considerata per classica ed assai diffusa, crediamo bene segnalare il recente articolo di D. N. Lehmer *Errors in Legendre's Tables of linear divisors* (Bull. of the American math. Society, 2.ª Serie, T. VIII), ove sono additate e corrette alcune inesattezze che ivi si trovano.

* * *

Periodici scientifici italiani. — Il lavoro preparatorio pel Catalogo internazionale della letteratura scientifica ha provato che in Italia esistono non meno di 238 pubblicazioni periodiche (riviste ed atti accademici) concernenti le scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche; fra esse non meno di 63 ammettono, in base al loro programma, lavori concernenti le scienze esatte.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

dell'Abbaco 50.
Abel 96, 97.
Achiardi 55.
Agnesi 16, 17.
Alasia 67.
d'Alembert
Alexandrewsky 34.
Almansi 55.
Amaldi U. 6, 14.
Amodeo 61.
Ampère 31.
Anatolio 62.
Andrade 66, 67.
André 32.
Apollonio 62, 113, 114.
Appell 11, 56.
Archimede 17, 47, 52, 105, 113, 115, 117.
Archita 117.
Aronhold 96.
Arzelà 18, 19, 60.

Bagnera 56.
Banal 38.
Barbarin 34, 40, 67, 70, 109, 111.
Bardey 124, 125.
Barrow 114.
Barth 127.
Basset 52-53.
Battaglini 109.
Baule 57.
Beda 49, 50.
Beltrami 8, 39, 52, 69.
de Berardinis 55.
Bernoulli 23 *n.*, 79.
Berry 66.
Bertoldo 55.
Bertrand 77.
Berzolari 39.
Bessel 35.
Bettini 63.
Bianchi 38.
Bianchini 128.
Biasi 63.
Biermann 85.
Bigourdan 32.
Bisson Ersilia 63.
Blaser 40.
Blondlot 42.
Bohnert 57.
du Bois-Reymond 59.
Bolyai G. 34, 35, 36, 62, 69, 117, 127.
Bolyai W. 62, 117.
Bonnel 67.
Bonnescu 34.
Bonnet 119.
Bonola 33, 40, 65, 111.
Booth 52.
Borchardt 126.
Bordin 32.
Borel 13, 32, 56, 83, 85, 97, 104.
Borelli 15 *n.*
Bortolotti Emma 64.
Bortolotti Ettore 14, 55.
Boschowich 17.
Bosscha 64.
Bouasse 42.
Bourlet 85.
Breguet 79.
Brigg 3, 4.
Brioschi 116.
Briosi 55.
Bronckhorst 49.
Broscio 3.
Brouckner 47, 48.
Brunacci 7.
Buhl 54, 56.
Burali-Forti 42, 116.
Burattini 32.
Burckhardt 67.
Burnside 34, 66.

Caminati 63.
Cantor M. 15-18, 49 *n.*, 50 *n.*, 42, 62, 64, 112, 128.
Cantor G. 45, 58.
Capelli 120, 122.
Caraccioli 18.
Carré 17.
Cartesio (vedi Descartes).
Casali 18.
Cassani 35.
Cassini 52.
Cauchy 45, 83, 97, 104.
Cavalieri, 2, 3, 4.
Cayley 41, 48, 67, 109.
Cazzaniga 87-91.
Celoria 56.
Ceretti 122.
Cesàro E. 32, 84, 101, 116.
Cesàro G. 32.
Chandler 67.
Chasles 48, 72, 75, 76, 77, 112.
Chrystal 67,
Ciani 55.
Clairaut 16.
Clerk Miss 1, 2.
Clifford 109.
Clinlock 67.
Collignon 35.
Comberousse 86.
Concina 19.
Conti 63.
Cornu 26.
Cotton 39.
Crawley 67.
Crema Norma 63.
Cremona 2, 79.
Crevetes 35.

Digitized by Google

Cua 55.
Curtze 128.
Czuber 25 *u.*, 86.

Dandelin 110.
Daniele 55.
Darboux 39, 109, 115, 119.
Dauge 35.
Dedekind
Dehen 35.
Delboeuf 67.
Descartes 2, 17, 52, 81.
Desimone Lucia 64.
Dickstein 61.
Diderot 16.
Dini 59.
Dinostrato 17.
Diocle 32.
Diofanto 47, 51, 113, 124.
Dirichlet (vedi Lejeune-Dirichlet).
Duport 67.
Dupuy 67.
Durège 17.
Dyck 96.

Efimov 35.
Egremont (Earl of) 2.
Enestrom 3, 62.
Engel 35, 36, 67.
Enriques 19, 23, 33, 55, 68.
Eschenbach 53.
Euclide 35, 63, 64, 67, 70, 85, 111, 113, 114, 115.
Eudosso 117.
Eulero 14, 31, 39, 47, 48, 80, 115, 116.
Eygerd 51.

Fabri Cornelia 64.
Fabry 83.
Faggi 68.
Fano 55.
Faure 73, 74.
Favaro 32, 62.
Felizzati 55.
Fermat 6, 44, 45, 47, 78, 81, 114.
Ferraris G. 58.
Feuerbach 41.
Fibbi 55.
Fiedler 21.
Finsterwalder 21.
Finzi C. 55.
Finzi L. 58.
Fontené 68.
Fourier 60.
de Francesco 35, 66.
Francoeur 32.
Frankland 117.
Frenet 59.
Frenicle 48.
Friecke 122, 124,
Friedlein 49.
Frisch 3.
Frizzo 49-51.
Frobenius 93.
Fuchs 13, 126-127.
Füller Loïe 55.

del Gaizo 55.
Galdeano 68.
Gallian 62.
Gallucci 68.
Galton 52.
Gauss 35, 36, 39, 48, 61, 62, 69, 70, 71, 81, 82, 114, 116, 117.
Gazzaniga 104, 109.
Gerling 35, 71.
Gerono 52.
Giamblico 51.
Girard 2, 3, 4.
Giudice 35, 63.
del Giudice 55.
G. L. (vedi Loria).
Gobbi-Belcredi 55.
Grandi 16.
Grassi 55.
Grassi Anaide 64.
Grassmann 32, 65, 116.
Greenhill 25, 56.
Grévy 14.
Günther 42, 62.
Guichard 39.
Guldberg 91.
Gundelfinger 96.
Guyon 26.

Hadamard 39, 42, 45, 68, 69, 82, 85.
Halsted 36, 39, 68.
Hamburger 13.
Hamilton 32, 116.
Hammer 56, 57.
Hankel 47.
Harriot 1-4.
Harrison 73.
Hatt 78.
Hauck 21.
Haussdorff 36, 40.
Heiberg 62.
Helmholtz 39, 40, 69.
Hermite 56, 119.
Herschel 115.
Hesse 96.
Hertz 58.
Hilbert 36, 39, 40, 84.
Hiltebeitel 114.
Hindeburg 53.
Hölder 36.
Hurwitz 84, 85.
Huygens 44 *n.*

Ippocrate 117.
Isokolow 71.
Issely 69.

Jacobi 27, 48, 90, 92, 94, 96.
Janssen 26.
Janssen van Raai 36.
Johnson 42.
Joly 32.
Jones 16.
de Jonquières 71, 82.

Kagan 36.
Kahan 36.
Karagiannides 69.
Keplero 3, 4.
Kirkmann 53.
Klein 39, 40, 61, 66, 69.
Königs 14, 32.
Königsberger 69, 126.
Kommerell 39.
Konen 47, 48.
Koppe 4.
Kozlowski 42.
Kronecker 48, 126.

Lagrange Ch. 69, 86.
Lagrange L. 2, 13, 48, 82, 116.

Digitized by Google

Laguerre 98, 99, 100.
Laisant 54, 56.
Lalande 32.
Lambert 68.
Laplace 13, 14.
Laugel 32.
Leau 83.
Lechalas 42, 69.
Lee Sidney **1**.
Legendre 30, 35, 38, 48, 128.
Lehmer 128.
Lejeune-Dirichlet 47, 48, 60, 126.
Legnazzi 55.
Lemoine 85, 86.
Leonardo Pisano 118, 128.
Lerch 85.
Le Roy 83, 84.
Leslie Stephen **1**.
Le Vasseur 40.
Le Verrier 42.
Levi Costantina 64.
Lie 14, 26, 27, 40, 69.
Lindemann 40, 66.
Lipschitz 59.
Lobatschewsky 35, 36, 67, 68, 69, 70, 109, 110, 111, 117, 127.
Lombardi 56.
Loria 18, 23, 26, 45, 48, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 61, 63, 69, 114, 117, 119, 124, 126.

Macaulay 36, 41.
Mac Coll 42.
Macfarlane 42.
Mac-Laurin 19, 52, 73.
Maestri Ida 63.
Magnani Teresa 63.
Manning 36.
Mansion 37, 40, 69, 70.
Massarini Iginia 55, 64.
Maxwell 58.
Mayer 92.
Méray 56, 64.
Mercatore 6.
Mersenne 63.
Meusnier 39.
Mey 39.
Meyer Fr. 23, 25.
Milhaud 42.
Mittag-Leffler 84, 88, 103, 104.
Möbius 48, 49.
Molk 118, 119.
Monge 18, 20, 21, 119.
Montcheuil 119.
Morehead 114.
Morera 55.
Moretti Anita 63.
Müller C. R. 35.

Nekrassow 37.
Nemorario Giordano 128.
Nesselmann 16, 49 *n*.
Netto 53, 54.
Newcomb 70.
Newton 4, 78, 115.
Niccoletti 55.
Nicollic 72.
Nicomaco 50, 51.
Nicomede 17, 52.
Noviomago 49, 51.

Olbers 35.
Olivier 20.
Ortu-Carboni 63.
Oseletto 55.
von Öttingen 127.
Ovazza 55.
d'Ovidio 41, 70, 109.
Ozanam 15.

Paciolo Luca 118.
Padé 84.
Padoa 42, 63.
Painlevé 84, 105.
Palatini 109.
Pannelli 55.
Pareto 52.
Pascal B. 6, 8, 44 *n*.
Pascal E. 26, 61, 70, 88, 91.
Pascal S. 52.
Peano 42, 59, 116.
Pearson 52.
Pell 47, 47 *u*.
Perks 16.
Perna 55.
Perrault 17.
Perroni 55.
Perry 122, 124.
Petersen 41, 56.
Petit d'Ormoy 32.
Pfaff 90, 94.
Philippow 70.
Picard 59, 88, 89.
Pieri 42.
Pietzker 37, 124, 125.
Pincherle 6, 14, 85, 88.
Pitagora 61, 117.
Pittarelli 63.
Pizzetti 55, 125.
Platone 117.
Plücker 48.
Poggendorff 127.
Poincaré 26, 42, 70, 98, 101, 116.
Poinsot 80.
Poncelet 32.
Porchiesi 55.
Poretzkij 42.
Porro 55.
Predella Lia 64.
Pressi Cornelia 64.
Pringsheim 45, 59, 83.
Proclo 117.

Ravà 63.
Razzaboni 39.
Recorde 118.
Regiomontano 128.
Reinhardt 70.
Reyes y Prosper 37, 70.
Rex 56.
Ricci 40, 61.
Ricordi 41, 66.
Ridolfi 17.
Riemann 25, 37, 39, 45, 109, 110, 111, 117.
Rigobon 117-118.
Riva Maria 63.
Robertson 2.
Roberval 15.
Roder 128.
Rolle 24.
Rost 25.
Rothe 53.
Rouché 86.
Rudert 65.
Runge 84.

Digitized by Google

Russell 42, 70.

Saavedra 62.
Saccheri 71.
Sacchi Stella 63.
Saltel 76.
Sardou 55.
Savasorda 128.
Saverien 16.
Scheeffer 59.
Schiaparelli 52.
Schilling 49.
Schischiskin 70.
Schläfli 23 *n*.
Schlesinger 14, 41, 127 *n*.
Schmidt 71.
Schmitz 37.
Schnermanns 86.
Schott 41.
Schotten 70.
Schoute 56.
Schröder 42.
Schröter 75.
Schulz 70.
Schumacher 35.
Schur 41, 105 *n*.
Schwab 35.
Semikolenow 71.
Serret 119.
Servant 85.
Severini 47.
Sforza 63.
Sikstel 37.
Simon 37, 38.
Sintoff 39, 40.
de Sluse 44 *n*.
Somigliana 67.
Sommer 37.
Sorel 71.
da Spira 128.
Stäckel 20 *n*., 39, 62, 71, 127.
Stallo 71.
Staudt 48, 49.
Steiner 53, 72.
Stephanos 41.
Stieltjes 84, 98, 101.
Stirling 48.
Stokes 125.
Story 71, 109.
Stringham 41.
Study 40, 41.
Suardi 16, 17, 18.
Süchtig 122, 124.

Tagliacozzo Emilia 64.
Talete 117.
Tannery J. 118, 119, 123.
Tannery P. 63, 114.
Taramelli 35.
Tarry 38, 71.
Taurinus 35.
Taylor 10, 11, 19, 24, 57.
Tchébycheff 85.
Tchelfranoff 71.
Tedone 55.
Teixeira 85.
Teone Smirneo 51.
Terracini Ida 64.
Thieme 105 *n*.
Thomae 32.
Thompson 115.
Tikomandritzky 71.
de Tilly 38, 70.
Tirelli 38.
Todaro Sofia 64.
Tolomeo Claudio 49.
Turazza 55.
Vacca 1, 16, 116, 118.
Vahlen 65.
Vailati 42, 55, 63.
Valentini Lucia 63.
Valla 51 *n*.
Valz 32.
Vanni Elena 64.
Vassilieff 39, 55, 67. 68, 71.
Veltman 38.
Veronese 104, 109.
Villareal 38.
Vitellione 3.
Viterbi 90.
Vivanti 19, 25, 45, 47, 61, 85, 86, 104, 124.
Volterra 51, 52, 55, 59.

Wächter 33, 71.
Wald 42.
Wallis 1, 47, 51 *n*.
Walras 52.
Walterhausen 35.
Wangerin 116.
Wargny 56.
Weber W. 36.
von Weber 91.
Weingarten 96.
Weierstrass 9, 45, 46, 59, 88, 89, 126.
Wertheim 47 *n*., 48.
Whitehead 65.
Wiener C. 85 *n*.
Wiener H. 48-49.
Wölffing 18.
Woolsey 41.

Zach 2.
Zeuthen 62, 112, 114.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

188555

[redacted]

QA
1
.B7
v.4-5

Sci